

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

### Έλεγχος για τις παραμέτρους θέσης δύο πληθυσμών με ανεξάρτητα δείγματα

Θέλοντας να εξετάσουμε τις μέσες τιμές δύο πληθυσμών πρέπει να διακρίνουμε κατά τα γνωστά από τη θεωρία δύο περιπτώσεις ανάλογα με το αν τα δείγματα είναι ανεξάρτητα ή εξαρτημένα. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που τα δείγματα είναι ανεξάρτητα.

**Σχόλιο:** Ο καθορισμός των δύο δειγμάτων στην περίπτωση ανεξάρτητων δειγμάτων στο λογισμικό γίνεται με τη βοήθεια μίας ποιοτικής μεταβλητής που διαχωρίζεται σε δύο κατηγορίες (π.χ. άνδρας-γυναίκα) και χρησιμεύει για τον καθορισμό των δύο υποθετικών πληθυσμών. Από την άλλη μεριά, ο καθορισμός των δύο εξαρτημένων δειγμάτων στο λογισμικό γίνεται με τη βοήθεια δύο στηλών. Στη μία καταγράφονται για παράδειγμα οι τιμές της υπό μελέτης ποσοτικής μεταβλητής πριν την εφαρμογή της μεθόδου, ενώ στην άλλη οι τιμές της μετά την εφαρμογή της μεθόδου. Λεπτομέρειες σχετικά με τα εξαρτημένα δείγματα θα δοθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Έστω ένα τυχαίο δείγμα  $X_1, \dots, X_n$  μεγέθους  $n$  από έναν πληθυσμό με μέση τιμή  $\mu_1$  και διακύμανση  $\sigma_1^2$ , άγνωστη. Επιπλέον έστω ένα τυχαίο δείγμα  $Y_1, \dots, Y_m$  μεγέθους  $m$  από έναν πληθυσμό με μέση τιμή  $\mu_2$  και διακύμανση  $\sigma_2^2$ , άγνωστη. Επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι τα δύο δείγματα είναι ανεξάρτητα. Ενδιαφερόμαστε για τον έλεγχο, σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , της μηδενικής υπόθεσης

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2,$$

ως προς μία εκ των

$$H_a : \mu_1 > \mu_2, \quad H_a : \mu_1 < \mu_2, \quad H_a : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Το παραπάνω πρόβλημα ελέγχεται υπό κάποιες υποθέσεις με τον παραμετρικό έλεγχο του t-test. Όταν κάποιες από τις υποθέσεις αυτές δεν ικανοποιείται και δεν υπάρχει τρόπος διόρθωσης του προβλήματος ο έλεγχος ανάγεται σε αυτόν ότι οι πληθυσμιακές

διάμεσοι είναι ίσες. Τα αποτελέσματα του τελευταίου ελέγχου γενικεύονται για τον δοθέν έλεγχο όταν τα δεδομένα είναι συμμετρικά.

## 5.1 Μεθοδολογία-Υλοποίηση στο S.P.S.S.

Η μεθοδολογία που θα χρησιμοποιηθεί για τη στατιστική ανάλυση ενός τέτοιου προβλήματος εξαρτάται από το αν πληρούνται ή όχι κάποιες προϋποθέσεις, τις οποίες και πρέπει αρχικά να ελέγξει ο ερευνητής. Πιο συγκεκριμένα, ελέγχουμε

α) αν το ποσοστό των ακραίων τιμών στις διαθέσιμες δειγματικές παρατηρήσεις από καθένα από τους δύο το πλήθος πληθυσμούς ξεπερνά το 10% αυτών, και

β) αν οι πληθυσμοί από τους οποίους λαμβάνονται τα τυχαία δείγματα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή.

Ανάλογα με τα αποτελέσματα των παραπάνω ελέγχων προβαίνουμε στον παραμετρικό έλεγχο του t test ή στο μη παραμετρικό έλεγχο (Wilcoxon-Mann-Whitney).

Από τα παραπάνω ίσως έγινε ήδη αντιληπτό ότι κομβικό σημείο για τον τρόπο διεξαγωγής του υπό μελέτη ελέγχου αποτελεί η διενέργεια των προκαταρκτικών ελέγχων α) και β), με βάση τα αποτελέσματα των οποίων θα αποφανθούμε αν θα προχωρήσουμε παραμετρικά ή μη παραμετρικά. Για το λόγο αυτό στη συνέχεια παρουσιάζονται όλα τα πιθανά αποτελέσματα των α) και β), τα διάφορα βήματα της ανάλυσης και οι αποφάσεις στις οποίες οδηγούμαστε.

1. Αρχικά ελέγχουμε αν υπάρχουν ακραίες τιμές στις διαθέσιμες δειγματικές τιμές καθενός από τους 2 το πλήθος πληθυσμούς. Αν το ποσοστό των ακραίων τιμών σε καθένα από τα δύο δείγματα δε ξεπερνά το 10%, τότε προχωρούμε στο βήμα 2. Αν το ποσοστό των ακραίων τιμών σε κάποιο από τα δύο δείγματα ξεπερνά το 10%, τότε δοκιμάζουμε μήπως ο μετασχηματισμός του λογαρίθμου διορθώνει το πρόβλημα. Αν το πρόβλημα αυτό διορθώνεται, τότε μεταβαίνουμε στο βήμα 2, σε διαφορετική περίπτωση συμπεραίνουμε ότι θα χρησιμοποιηθεί ο μη παραμετρικός έλεγχος (βλέπε βήμα 4).

2. Στο βήμα 2, χρησιμοποιώντας το τεστ των Shapiro-Wilk καθώς και γραφικούς τρόπους, ελέγχουμε αν οι διαθέσιμες δειγματικές παρατηρήσεις (είτε οι αρχικές είτε οι μετασχηματισμένες) καθενός από τους δύο πληθυσμούς προέρχονται από έναν πληθυσμό που περιγράφεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή. Αν ο έλεγχος της κανονικότητας μας υποδεικνύει ότι η υπόθεση της κανονικότητας δεν απορρίπτεται ( $p$ -τιμή  $> \alpha$ ), τότε η ανάλυση θα συνεχιστεί με τον παραμετρικό έλεγχο του t τεστ (βλέπε βήμα 3). Αν

η υπόθεση της κανονικότητας απορρίπτεται για έναν ή και για τους δύο υπό εξέταση πληθυσμούς (τεστ Shapiro-Wilk, p-τιμή  $< \alpha$ ), τότε ελέγχουμε αν το πρόβλημα της μη κανονικότητας διορθώνεται μετασχηματίζοντας κατάλληλα τα δεδομένα (Box-Cox μετασχηματισμός) και επανελέγχοντας την ύπαρξη ακραίων τιμών, δηλαδή ξεκινώντας την ανάλυση από το βήμα 1. Αν με κάποιο μετασχηματισμό των δεδομένων επιτυγχάνεται η κανονικότητα και των δύο πληθυσμών, συνεχίζουμε την ανάλυση παραμετρικά (βήμα 3). Σε αντίθετη περίπτωση, αν το πλήθος των δειγματικών παρατηρήσεων (μη λαμβάνοντας υπόψη αυτές που έχουν αφαιρεθεί στο βήμα 1) εκείνου του πληθυσμού που δεν περιγράφεται από την κανονική κατανομή είναι μεγάλο (συνήθως μεγαλύτερο του 30) κάνοντας χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, προβαίνουμε στον παραμετρικό έλεγχο της υπό έλεγχο υπόθεσης (βλέπε βήμα 3). Τότε η κρίσιμη πιθανότητα του ελέγχου και το διάστημα εμπιστοσύνης θα είναι προσεγγιστικά. Στην περίπτωση τώρα που το πρόβλημα της μη κανονικότητας, κάποιου ή και των δύο πληθυσμών δε διορθώνεται (τεστ Shapiro-Wilk, p-τιμή  $< \alpha$ ), και ταυτόχρονα το πλήθος των δειγματικών παρατηρήσεων από αυτόν τον πληθυσμό ή από αυτούς τους πληθυσμούς ανάλογα (μη λαμβάνοντας υπόψη αυτές που έχουν αφαιρεθεί στο βήμα 1) είναι μικρό (συνήθως μικρότερο του 30), συνεχίζεται η περαιτέρω ανάλυση μη παραμετρικά (βήμα 4).

3. Παραμετρικός έλεγχος t τεστ: Η στατιστική συνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί και οι κρίσιμες περιοχές για την υπό έλεγχο μηδενική υπόθεση καθορίζονται στη βάση της ισότητας ή μη των δύο πληθυσμιακών διακυμάνσεων.

ι) Ειδικότερα, αν η υπόθεση της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων δεν απορρίπτεται (τεστ του Levene, p-τιμή  $> \alpha$ ), χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n+m-2},$$

όπου  $\bar{X}$  και  $\bar{Y}$  οι δειγματικές μέσες τιμές και  $S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$ , με  $S_1^2$ ,  $S_2^2$  τις

δειγματικές διακυμάνσεις. Οι κρίσιμες περιοχές του ελέγχου είναι:  $t \geq t_{n+m-2, \alpha}$ ,  $t \leq -t_{n+m-2, \alpha}$

και  $|t| \geq t_{n+m-2, \alpha/2}$ , για τον έλεγχο της  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ , ως προς τις εναλλακτικές  $H_a : \mu_1 > \mu_2$ ,

$H_a : \mu_1 < \mu_2$ ,  $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ , αντίστοιχα. Επιπλέον το 100(1- $\alpha$ )% Δ.Ε. για τη διαφορά των

μέσων τιμών  $\mu_1 - \mu_2$  είναι

$$\left( \bar{X} - \bar{Y} - t_{n+m-2, \alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}, \bar{X} - \bar{Y} + t_{n+m-2, \alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right).$$

υ) Αν η υπόθεση της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων απορρίπτεται (τεστ του Levene,  $p$ -τιμή  $< \alpha$ ), χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση (γνωστό ως τεστ του Welch)

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}^{H_0}}{S} \sim t_v,$$

όπου  $S^2 = \frac{S_1^2}{n} + \frac{S_2^2}{m}$ , και  $v = \frac{c^2}{n-1} + \frac{(1-c)^2}{m-1}$ , όπου  $c = \frac{S_1^2}{nS^2}$ .

Οι κρίσιμες περιοχές του ελέγχου είναι:  $t \geq t_{v,\alpha}$ ,  $t \leq -t_{v,\alpha}$  και  $|t| \geq t_{v,\alpha/2}$ , για τον έλεγχο της  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ , ως προς τις εναλλακτικές  $H_a : \mu_1 > \mu_2$ ,  $H_a : \mu_1 < \mu_2$ ,  $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ , αντίστοιχα. Επιπλέον το  $100(1-\alpha)\%$  Δ.Ε. για τη διαφορά των μέσων τιμών  $\mu_1 - \mu_2$  είναι

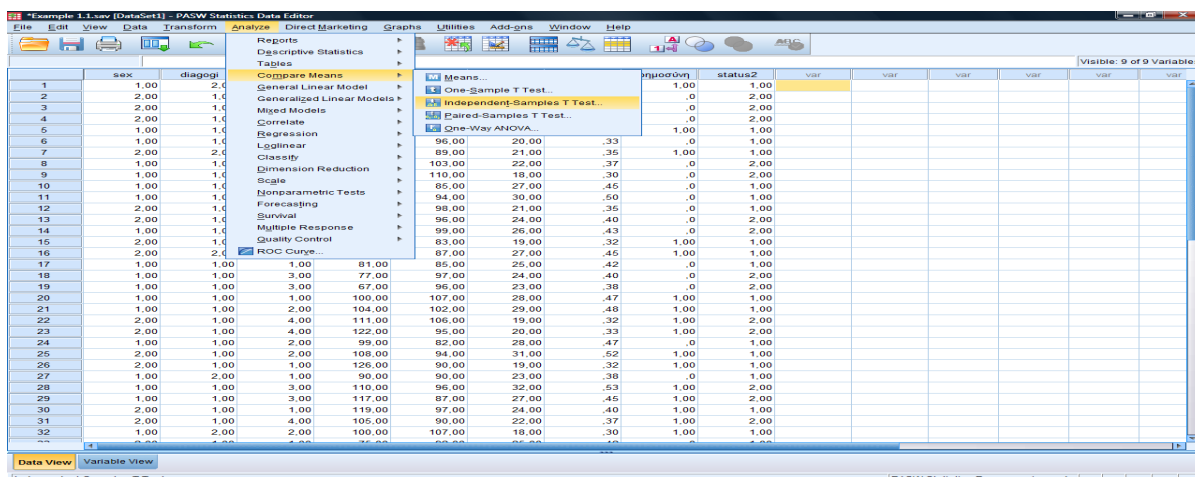
$$(\bar{X} - \bar{Y} - t_{v,\alpha/2}S, \bar{X} - \bar{Y} + t_{v,\alpha/2}S).$$

**Επισήμανση:** Σε περίπτωση που έχει χρησιμοποιηθεί κάποιος μετασχηματισμός διόρθωσης του προβλήματος είτε λόγω της ύπαρξης πολλών ακραίων τιμών είτε λόγω της απόκλισης από την κανονικότητα, τότε όλα τα παραπάνω αναφέρονται στις μετασχηματισμένες τιμές και στο τροποποιημένο σε μέγεθος δείγμα. Ειδικότερα, αν έχει χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός του λογαρίθμου, θα προβούμε στον έλεγχο αν ο μέσος λογάριθμος του ενός πληθυσμού δε διαφέρει στατιστικά σημαντικά από το μέσο λογάριθμο του άλλου.

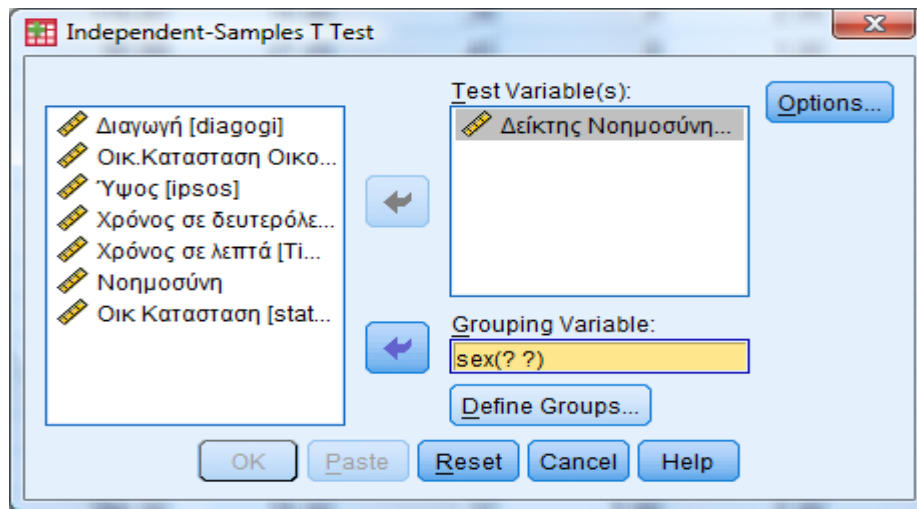
### Υλοποίηση στο S.P.S.S.

Υλοποιείται από τη βασική ράβδο του λογισμικού ακολουθώντας τη διαδικασία

- i. Analyze → Compare Means → Independent-Samples T Test.



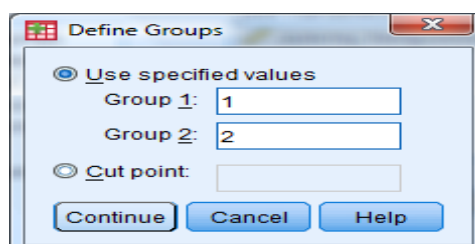
ii. Στο νέο παράθυρο διαλόγου που προκύπτει διαλέγουμε τη μεταβλητή (ποσοτική) που παριστά το χαρακτηριστικό που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε και τη μετακινούμε στο πλαίσιο Test Variable(s).



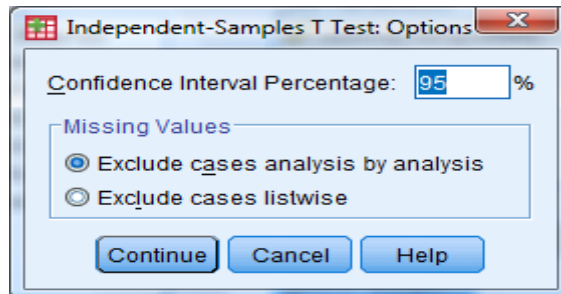
Στο πλαίσιο Grouping Variable καθορίζουμε τη μεταβλητή (ποιοτική) που διαχωρίζει τα δύο δείγματα.

Για παράδειγμα αν θέλουμε να μελετήσουμε αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στο μέσο δείκτη νοημοσύνης αγοριών και κοριτσιών, τοποθετούμε στα πλαίσια Test Variable και Grouping Variable, τις μεταβλητές «Δείκτης Νοημοσύνης» και «Sex», αντίστοιχα.

iii. Στη συνέχεια από το πλαίσιο Define Groups προσδιορίζουμε τον τρόπο διαχωρισμού των δύο δειγμάτων είτε από το πλαίσιο Use specified values είτε από το πλαίσιο Cut point. Αν χρησιμοποιήσουμε την πρώτη επιλογή δηλώνουμε την τιμή της ποιοτικής μεταβλητής που καθορίστηκε στο πλαίσιο Grouping Variable για καθένα από τα Group, λαμβάνοντας υπόψη ότι κάθε άλλη τιμή της θα εξαιρεθεί από την ανάλυση. Αν χρησιμοποιηθεί η δεύτερη επιλογή, η πρώτη κατηγορία θα αποτελείται από όλες εκείνες τις περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε τιμές μικρότερες του αριθμού που δηλώσαμε (κατά αυτόν τον τρόπο μπορούμε να δηλώσουμε και ποσοτική μεταβλητή που με τη χρήση του Cut point ουσιαστικά μετατρέπεται σε ποιοτική).



iv. Από την επιλογή Options έχουμε τη δυνατότητα να καθορίσουμε τον τρόπο χειρισμού των ελλειπόν τιμών καθώς και να προσδιορίσουμε το βαθμό εμπιστοσύνης του διαστήματος εμπιστοσύνης που θα κατασκευαστεί για τη διαφορά των μέσων τιμών.



### Ερμηνεία αποτελεσμάτων του S.P.S.S

Από τον πίνακα Group Statistics το λογισμικό μας πληροφορεί ότι είναι διαθέσιμες 19 και 16 αντίστοιχα παρατηρήσεις για αγόρια και κορίτσια. Ο μέσος δείκτης νοημοσύνης των 19 αγοριών και 16 κοριτσιών είναι 93.4211 και 101.125 αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι ο μέσος δείκτης νοημοσύνης των κοριτσιών είναι μεγαλύτερος. Μένει να διαπιστώσουμε αν είναι στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερος. Επιπλέον, στον πίνακα αυτό μας δίνονται οι τυπικές αποκλίσεις και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής του δείκτη νοημοσύνης ως προς το φύλο.

**Group Statistics**

		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Δείκτης Νοημοσύνης	Αγόρι	19	93,4211	13,82154	3,17088
	Κορίτσι	16	101,1250	14,51379	3,62845

Στον πίνακα Independent Samples Test υλοποιείται ο έλεγχος της υπόθεσης ότι δε διαφέρει ο μέσος δείκτης νοημοσύνης των αγοριών από των κοριτσιών. Η στατιστική συνάρτηση ελέγχου καθορίζεται από την απόρριψη ή όχι της υπόθεσης της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων. Η υπόθεση της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων δεν απορρίπτεται (τεστ του Levene, τιμή του F στατιστικού τεστ =0.079, p-τιμή=0.781>0.05). Ο μέσος δείκτης νοημοσύνης αγοριών και κοριτσιών δε διαφέρει στατιστικά σημαντικά (t στατιστικό, τιμή=-1.606, β.ε.=33, p-τιμή=0.118>0.05). Τέλος, ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση διαφορά του δείκτη νοημοσύνης αγοριών και κοριτσιών είναι (βλέπε 95% Confidence Interval of the Difference) είναι το (-17.46552, 2.05763).

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Δείκτης Νοημοσύνης	Equal variances assumed	,079	,781	-1,606	33	,118	-7,70395	4,79799	17,46552	2,05763
	Equal variances not assumed			-1,599	31,399	,120	-7,70395	4,81872	17,52674	2,11885

4. Μη παραμετρικός έλεγχος Wilcoxon-Mann-Whitney: Θέλοντας να εφαρμόσουμε το Mann-Whitney test, το οποίο είναι ισοδύναμο με το τεστ του Wilcoxon, για τον έλεγχο ότι οι δύο πληθυσμοί δε διαφέρουν ως προς την παράμετρο θέσης τα δύο δείγματα αναμιγνύονται και διατάσσονται κατά αύξουσα σειρά. Επιπλέον, υπολογίζονται οι τάξεις (ranks). Σημειώνεται ότι στην περίπτωση δεσμών οι τάξεις προκύπτουν ως ο μέσος όρος των τάξεων που θα έπαιρναν οι παρατηρήσεις αυτές αν δε διέφεραν μεταξύ τους. Αν οι πληθυσμοί είναι ίδιοι ως προς την παράμετρο θέσης, οι τάξεις θα πρέπει να είναι τυχαία αναμεμιγμένες στα δύο δείγματα. Έστω  $U_X$  ( $U_Y$  ανάλογα) ο αριθμός των φορών που μία παρατήρηση  $x$  ακολουθεί μία παρατήρηση  $y$  (ο αριθμός των φορών που μία παρατήρηση  $y$  ακολουθεί μία παρατήρηση  $x$ , ανάλογα). Τότε προκύπτει ότι:  $U_X = \sum_{i=1}^n R_i(X_i) - \frac{n(n+1)}{2}$ , και  $U_Y = \sum_{j=1}^m R_j(Y_j) - \frac{m(m+1)}{2}$ , όπου  $R_i(X_i)$ ,  $R_j(Y_j)$  οι τάξεις των  $X_1, \dots, X_n$  και  $Y_1, \dots, Y_m$ . Το Mann-Whitney U στατιστικό ορίζεται από τη σχέση:  $U = \min(U_X, U_Y)$ . Αποδεικνύεται ότι για τιμές των  $n$ ,  $m$  μεγαλύτερες ή ίσες του οκτώ το Mann-Whitney U στατιστικό ακολουθεί προσεγγιστικά μία κανονική κατανομή. Ειδικότερα, είναι γνωστό ότι προσεγγιστικά ισχύει ότι:

$$Z = \frac{U - \frac{nm}{2}}{\sqrt{\frac{nm(m+n+1)}{2}}} \stackrel{H_0}{\sim} N(0,1),$$

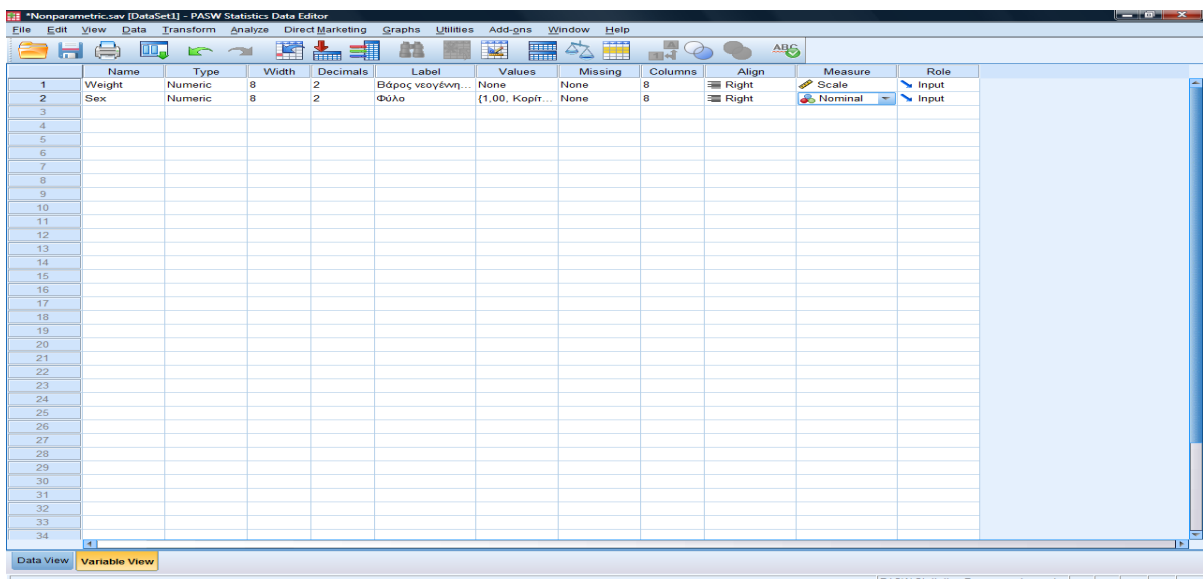
και οι κρίσιμες περιοχές για τους ελέγχους είναι:  $Z \geq z_\alpha$ ,  $Z \leq -z_\alpha$  και  $|Z| \geq z_{\alpha/2}$ , αντίστοιχα.

### Υλοποίηση στο S.P.S.S.

Στον παρακάτω πίνακα δεδομένων, που προέρχεται από το άρθρο του Peter K. Dunn (1999), δίνεται το βάρος ενός νεογέννητου σε γραμμάρια και το φύλο του (1=κορίτσι 2=αγόρι). Θέλουμε να ελέγξουμε αν το μέσο βάρος των νεογέννητων αγοριών διαφέρει από το μέσο βάρος των νεογέννητων κοριτσιών, με το τεστ Wilcoxon-Mann-Whitney (χωρίς να εξεταστεί αν είναι απαραίτητη η χρήση του).

Φύλο	Βάρος	Φύλο	Βάρος	Φύλο	Βάρος
1	3837	2	2635	1	3500
1	3334	2	3920	2	3736
2	3554	2	3690	2	3370
2	3838	1	3430	2	2121
2	3625	1	3480	2	3150
1	2208	1	3116	1	3866
1	1745	1	3428	1	3542
2	2846	2	3783	1	3278
2	3166	2	3345	2	3402
2	3520	2	3034	2	2902
2	3380	1	2184	2	3406
2	3294	2	3300	1	3523
1	2576	1	2383	2	3630
1	3208	2	3428	1	3746
2	3521	2	4162		

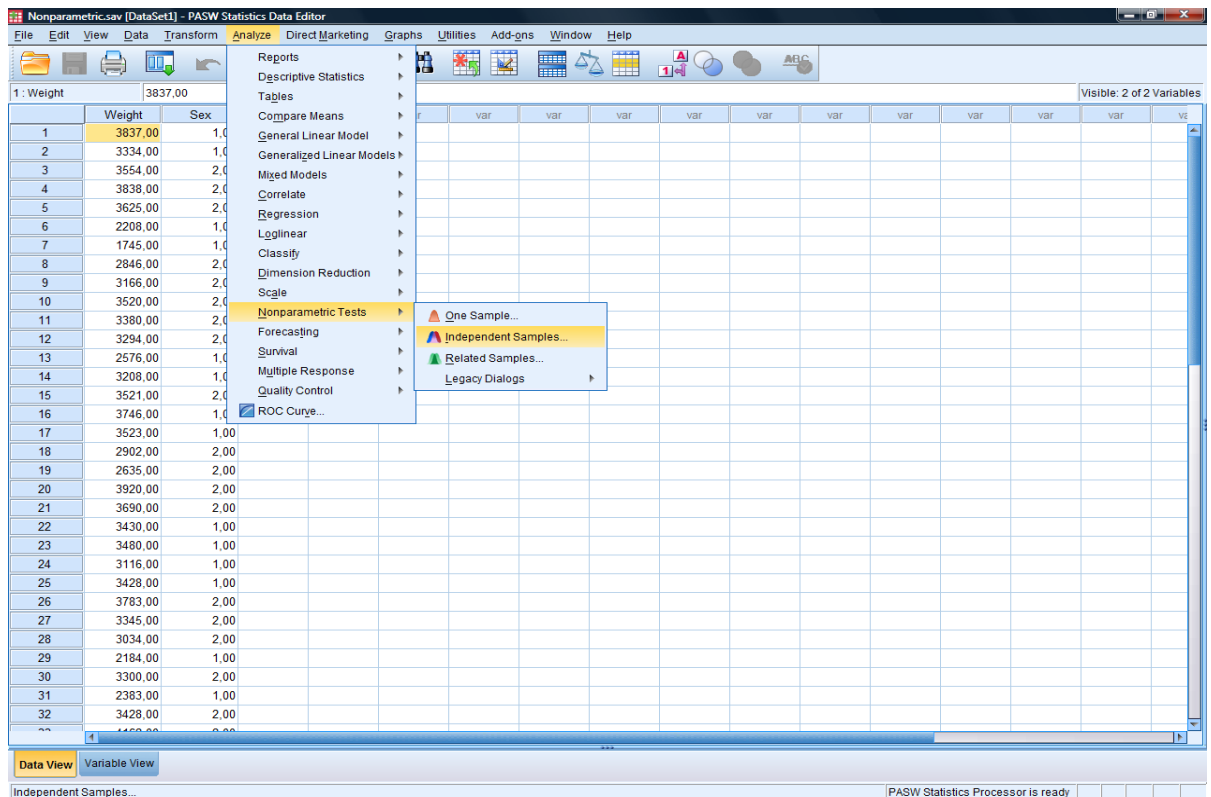
Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση καθορίζουμε στο πλαίσιο Variable View ποια μεταβλητή είναι συνεχής και ποια είναι ονομαστική.



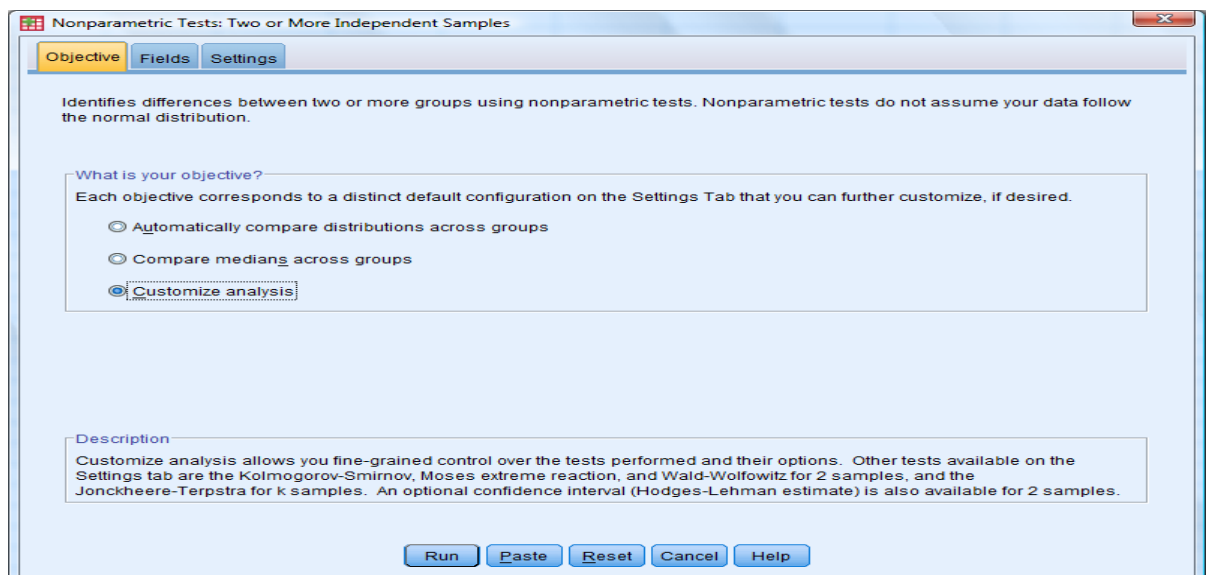


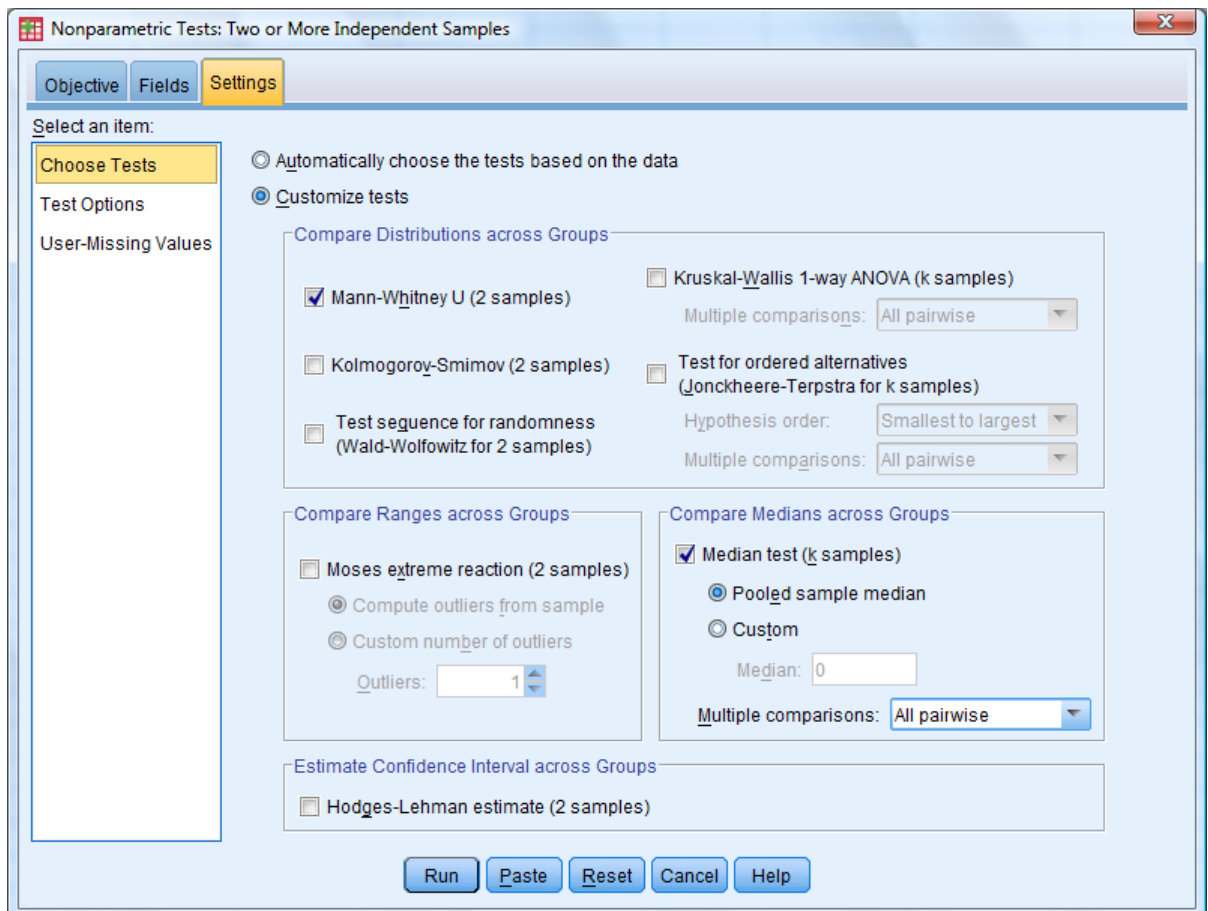
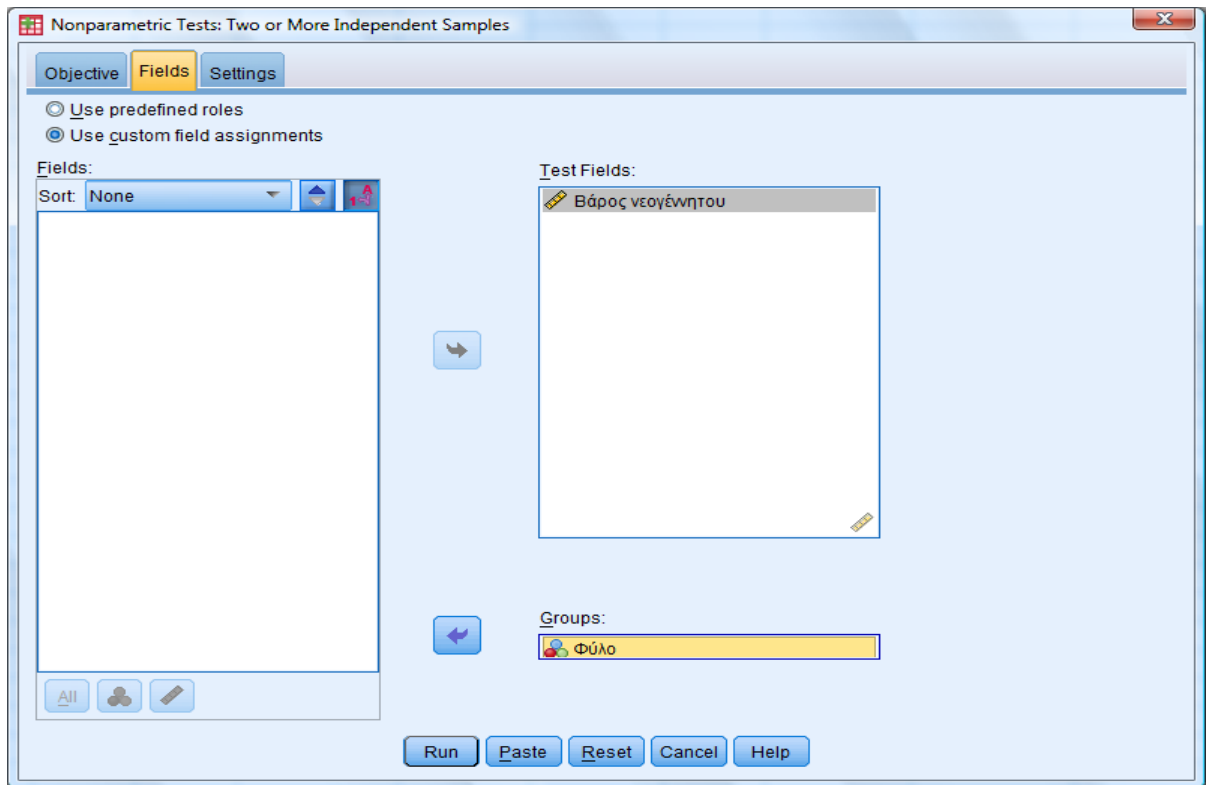
Έπειτα από το κύριο μενού επιλέγουμε

i. Analyze→Non Parametric Tests→Independent Samples.



Στο νέο παράθυρο διαλόγου που προκύπτει επιλέγουμε στο πλαίσιο Objective την επιλογή Customize analysis, έτσι ώστε στη συνέχεια από τα πλαίσια Fields και Settings να καθορίσουμε τον έλεγχο τον οποίο θέλουμε να διενεργηθεί όπως φαίνεται στα σχήματα που ακολουθούν.





Δηλαδή τοποθετούμε στο πλαίσιο Test Field(s) την υπό μελέτη ποσοτική μεταβλητή (έστω το Βάρος νεογέννητου), ενώ στο πλαίσιο Groups την ποιοτική μεταβλητή (έστω το Φύλο), η οποία μας διαχωρίζει τους δύο πληθυσμούς.

Στο παράθυρο διαλόγου Settings μας δίνεται η δυνατότητα να διαλέξουμε τον τύπο του μη παραμετρικού ελέγχου που θέλουμε να διενεργηθεί. Επιλέγουμε το πλαίσιο Mann-Whitney U και την επιλογή Median Test (k samples). Το πρώτο στατιστικό τεστ όπως μας πληροφορεί το Help του στατιστικού πακέτου ελέγχει την υπόθεση ότι τα δύο δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό ενώ το δεύτερο την υπόθεση της ισότητας των πληθυσμιακών διαμέσων.

### Ερμηνεία αποτελεσμάτων

Από τον παρακάτω πίνακα προκύπτει ότι δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στη διάμεσο του βάρους νεογέννητων αγοριών και κοριτσιών, καθώς είναι  $p\text{-τιμή}=1>0,05$ . Το ερώτημα τώρα είναι πότε τα αποτελέσματα αυτά γενικεύονται για το μέσο βάρος;

**Hypothesis Test Summary**

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Βάρος νεογέννητου is the same across categories of Φύλο.	Independent-Samples Mann-Whitney U Test	.346	Retain the null hypothesis.
2	The medians of Βάρος νεογέννητου are the same across categories of Φύλο.	Independent-Samples Median Test	1.000	Retain the null hypothesis.

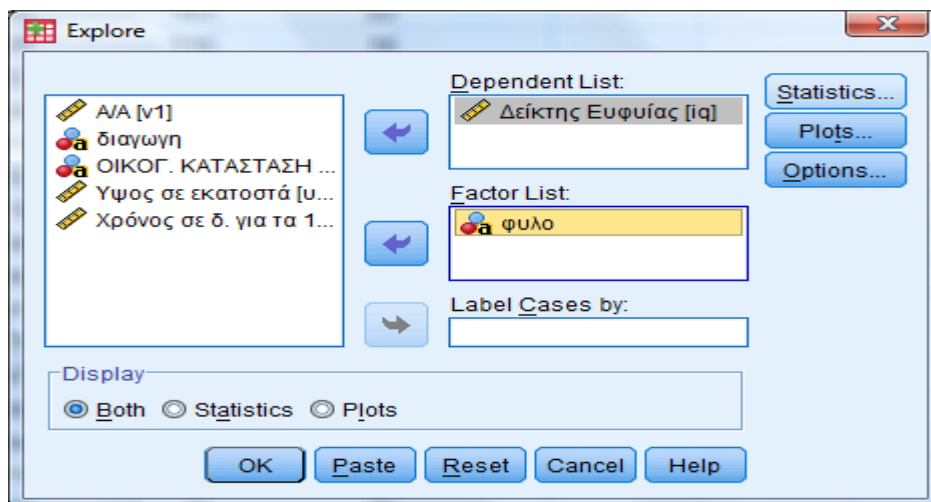
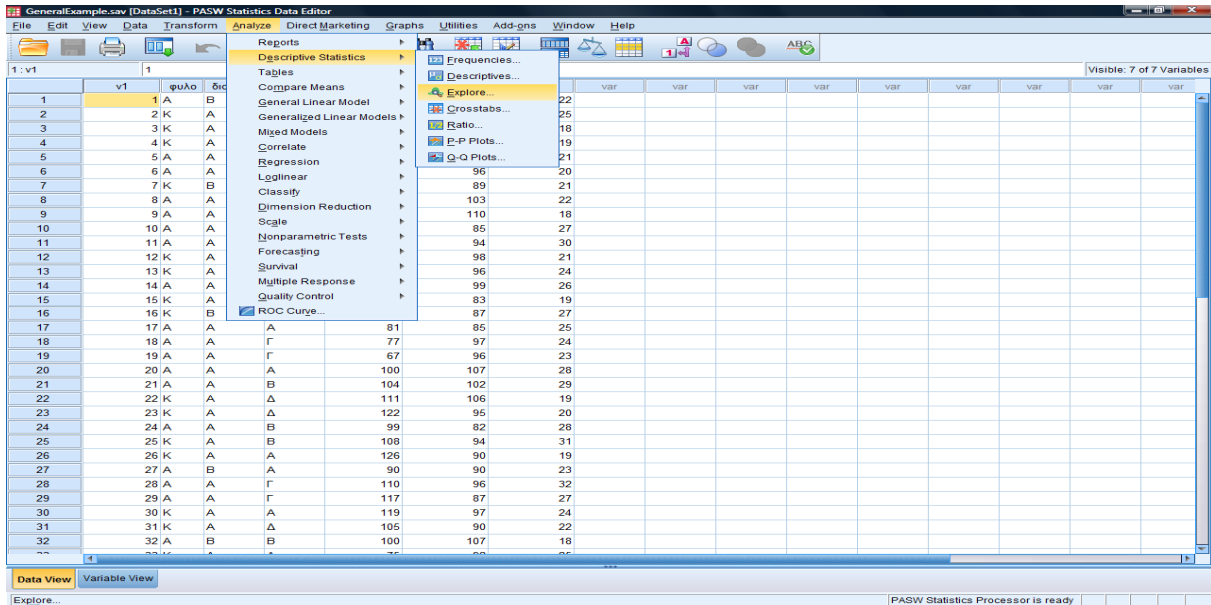
Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

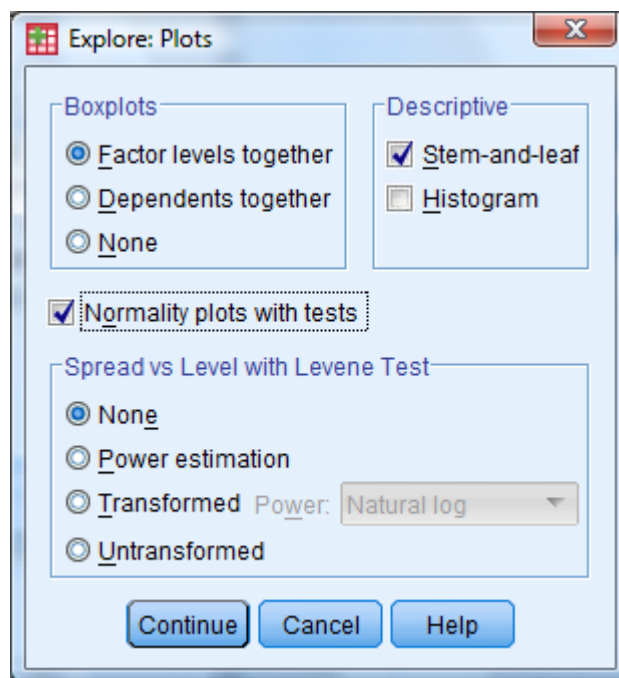
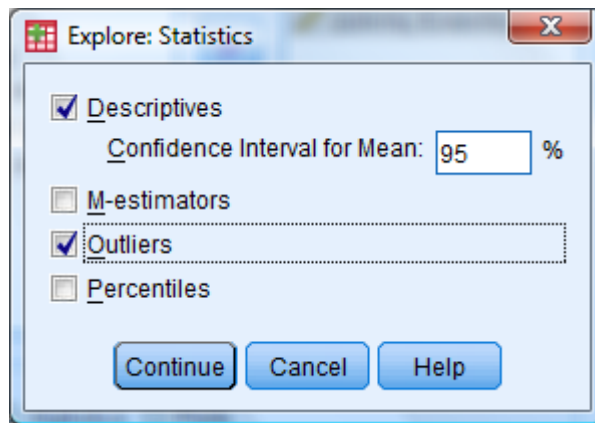
## 5.2 Παραδείγματα

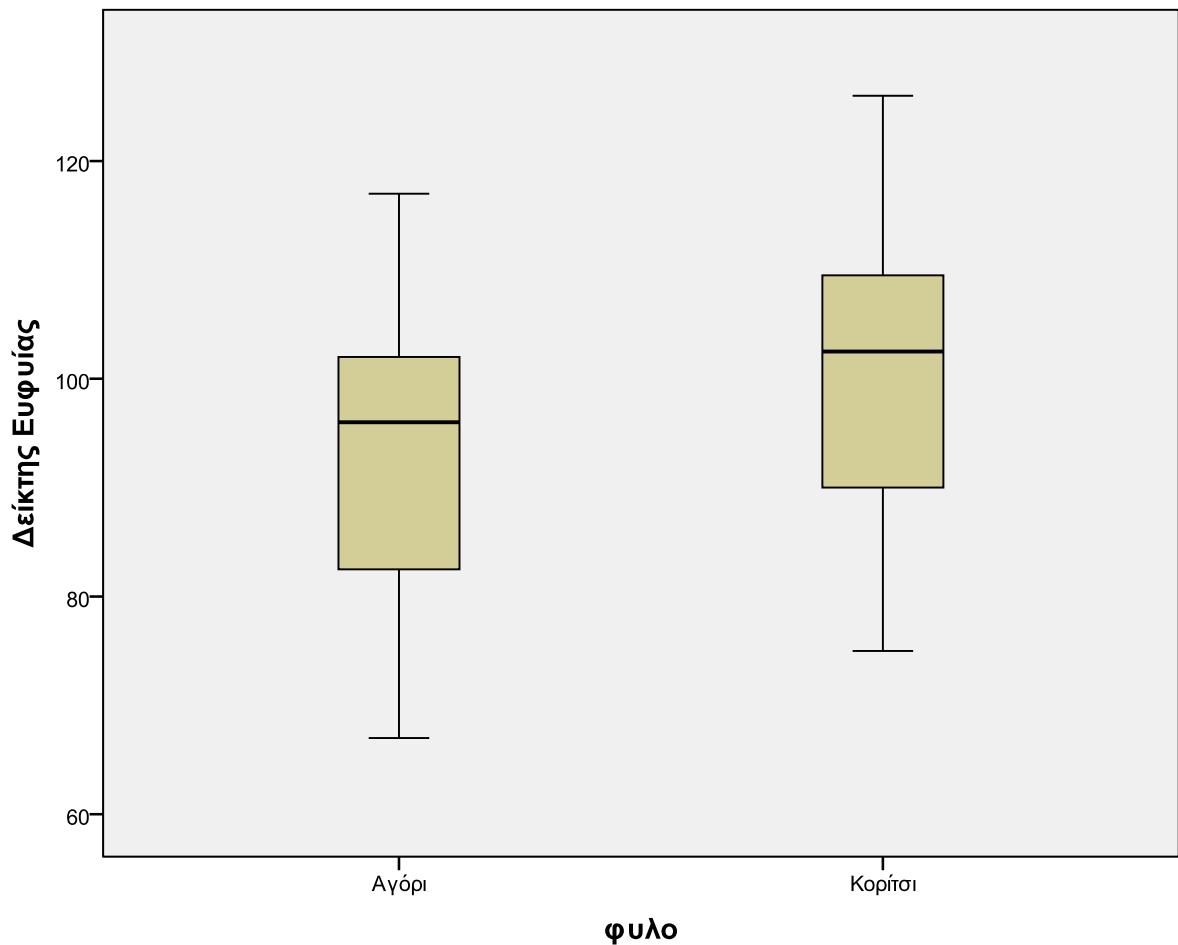
**Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>** Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του αρχείου GeneralExample.sav\* θέλουμε να ελέγξουμε, αν είναι εφικτό, αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στο μέσο δείκτη ευφυΐας αγοριών και κοριτσιών.

### Υλοποίηση:

**Έλεγχος Ακραίων τιμών:** Αρχικά θα ελέγξουμε την ύπαρξη ακραίων τιμών στις δειγματικές τιμές που καταγράφεται ο δείκτης ευφύιας αγοριών και κοριτσιών και ταυτόχρονα για να μην επανερχόμαστε θα ζητούμε και γραφικούς-στατιστικούς τρόπους ελέγχου της κανονικότητας. Για το σκοπό αυτό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα (διαδικασία Explore):







Από τα παραπάνω θηκογράμματα προκύπτει ότι δεν υπάρχουν ακραίες τιμές στις δειγματικές τιμές του δείκτη ευφυΐας αγοριών και κοριτσιών.

Προσοχή: Αν υπάρχουν ακραίες τιμές τις αποκλείουμε μία μία για κάθε «ομάδα», ξεκινώντας από την πιο απομακρυσμένη της ομάδας. **Το ποσοστό 10% δεν το υπολογίζουμε στο σύνολο των παρατηρήσεων αλλά στον αριθμό των παρατηρήσεων εντός κάθε ομάδας.**

Έπειτα ελέγχουμε αν οι δειγματικές τιμές του δείκτη ευφυΐας αγοριών και κοριτσιών προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς (τεστ Shapiro Wilk έχει ήδη ζητηθεί η υλοποίηση του στο προηγούμενο βήμα)

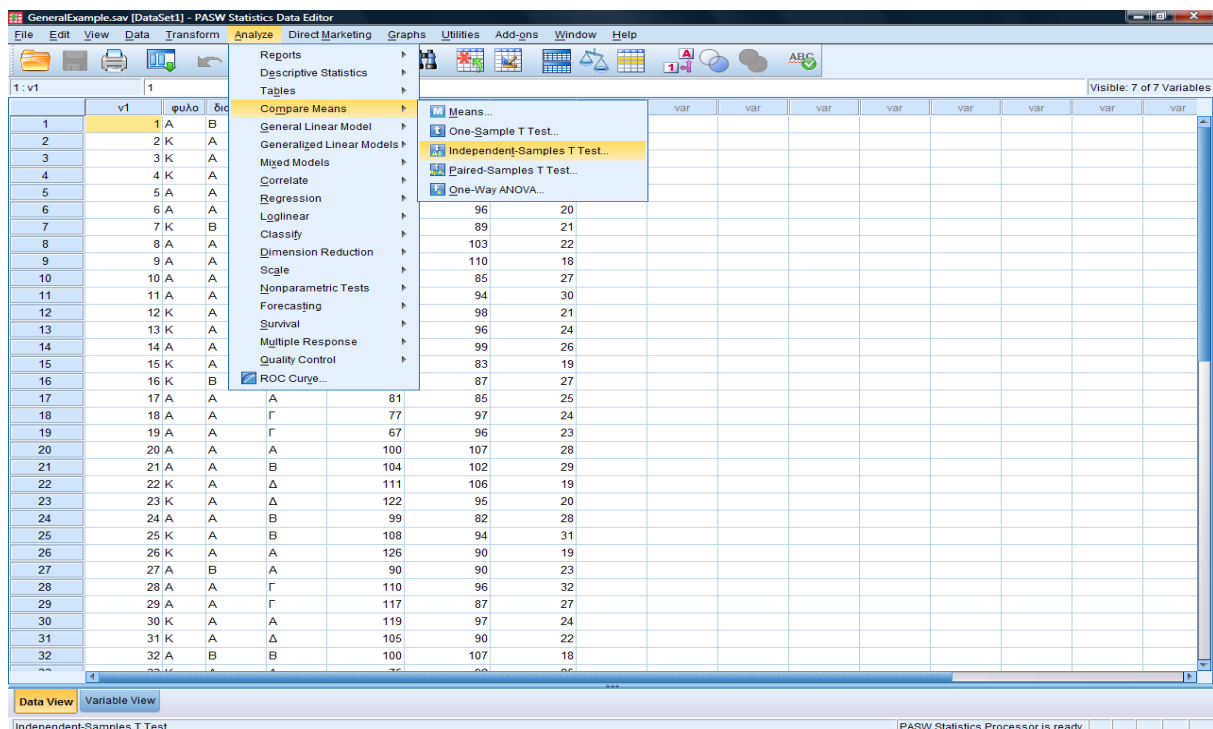
### Tests of Normality

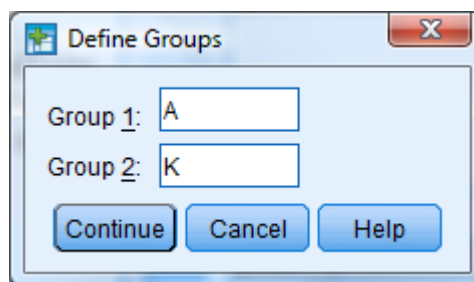
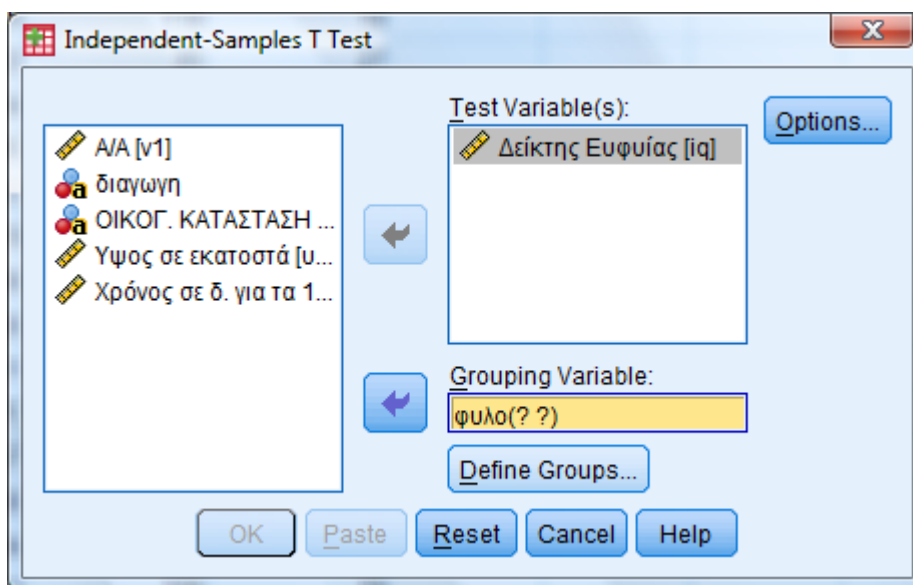
φυλο		Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
		Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Δείκτης	Αγόρι	,130	19	,200*	,969	19	,764
Ευφύιας	Κορίτσ	,105	16	,200*	,974	16	,893

a. Lilliefors Significance Correction

\*. This is a lower bound of the true significance.

Η υπόθεση της κανονικότητας δεν απορρίπτεται καθώς από τον πίνακα αυτό και από την στήλη Shapiro-Wilk Sig. βλέπουμε ότι η κρίσιμη πιθανότητα (p-value) για την ομάδα των αγοριών είναι 0,764 ενώ για την ομάδα των κοριτσιών 0,893. Επειδή και οι δυο αυτές τιμές είναι μεγαλύτερες από το 0,05 (5%) συμπεραίνουμε ότι η υπόθεση ότι τα δύο δείγματα προέρχονται από πληθυσμούς που περιγράφονται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή δεν μπορεί να απορριφθεί. Επομένως θα προβούμε σε παραμετρικό έλεγχο δύο μέσων τιμών: (από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ποια μορφή του t τεστ θα χρησιμοποιηθεί καθορίζεται από την ικανοποίηση ή όχι της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων. Η υπόθεση αυτή ελέγχεται από το στατιστικό τεστ του Levene).





### Group Statistics

φυλο		N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Δείκτης Ευφύιας	Αγόρι	19	93,42	13,822	3,171
	Κορίτσι	16	101,13	14,514	3,628



### Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2- tailed)	Mean Differe nce	Std. Error Differe nce	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Δείκτης Ευφυΐας	Equal variances assumed	,079	,781	-1,606	33	,118	-7,704	4,798	-17,466	2,058
	Equal variances not assumed			-1,599	31,399	,120	-7,704	4,819	-17,527	2,119

Η υπόθεση της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων δεν απορρίπτεται (τεστ Levene  $p$ -τιμή=0,781). Ο μέσος δείκτης ευφυΐας αγοριών και κοριτσιών δε διαφέρει στατιστικά σημαντικά ( $p$ -τιμή=0,118>0.05). **Προσοχή:** Αν δεν ισχύει η ισότητα των πληθυσμιακών διακυμάνσεων τότε οδηγούμαστε στα αποτελέσματα του  $t$  τεστ της γραμμής Equal variances not assumed.

**Αναφορά:** Θέλουμε να ελέγξουμε αν ο μέσος δείκτης ευφυΐας αγοριών και κοριτσιών δε διαφέρει στατιστικά σημαντικά. Επομένως πρόκειται για έναν έλεγχο της ισότητας δύο μέσων τιμών με ανεξάρτητα τυχαία δείγματα. Για να μπορούμε να αποφανθούμε χρησιμοποιώντας τον παραμετρικό έλεγχο του  $t$ -test με ανεξάρτητα δείγματα θα πρέπει να πληρούνται οι ακόλουθες υποθέσεις:

1. Τα δείγματά μας να είναι τυχαία επιλεγμένα
2. Να μην υπάρχουν ακραίες τιμές στα δειγματικά δεδομένα κάθε πληθυσμού που να ξεπερνούν σε ποσοστό το 10%.
3. Κάθε πληθυσμός να περιγράφεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή.

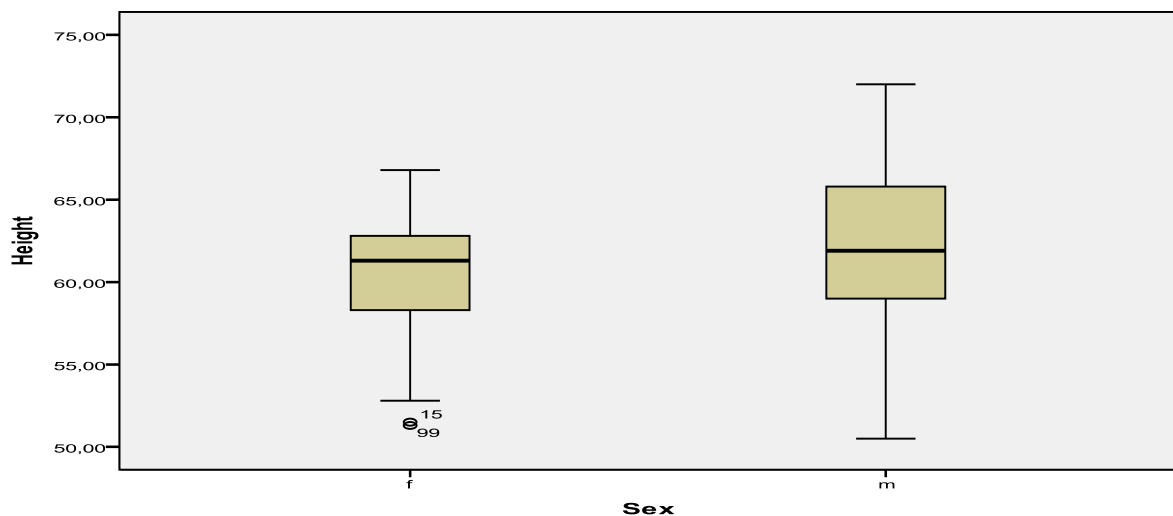
Η πρώτη από τις προϋποθέσεις σχετίζεται με τον τρόπο που επιλέξαμε τα δείγματά μας και ικανοποιείται.

Αρχικά ελέγχουμε την ύπαρξη ακραίων τιμών στις δειγματικές παρατηρήσεις που καταγράφεται ο δείκτης ευφυΐας αγοριών και κοριτσιών αντίστοιχα. Ο έλεγχος της ύπαρξης ακραίων τιμών στο δείγμα των 19 ανδρών και στο δείγμα των 16 γυναικών αποδεικνύει ότι δεν υπάρχουν ακραίες τιμές (βλέπε θηκογράμματα 1,2 στο σχήμα 1). Έπειτα ελέγχουμε την υπόθεση ότι τα δύο δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς. Προκύπτει ότι ικανοποιείται τόσο η υπόθεση ότι οι δειγματικές τιμές του δείκτη ευφυΐας των αγοριών προέρχονται από κανονικό πληθυσμό (Shapiro Wilk, p-τιμή=0,764) όσο και η υπόθεση ότι οι δειγματικές τιμές του δείκτη ευφυΐας των κοριτσιών προέρχονται από κανονικό πληθυσμό (Shapiro Wilk, p-τιμή=0,893)

Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τον παραμετρικό έλεγχο του τεστ για να ελέγξουμε την υπόθεση της ισότητας των μέσου δείκτη ευφυΐας αγοριών και κοριτσιών. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ποια μορφή του t τεστ θα χρησιμοποιηθεί καθορίζεται από την ικανοποίηση ή όχι της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων. Η υπόθεση της ισότητας των διακυμάνσεων δεν απορρίπτεται (τεστ του Levene,  $F=0,079$ ,  $p\text{-value}=0,781$ ). Ο μέσος δείκτης ευφυΐας των αγοριών δεν διαφέρει στατιστικά σημαντικά από το μέσο δείκτη ευφυΐας των κοριτσιών ( $t=-1,606, df=33, p=0,118 > 0.05$ ).

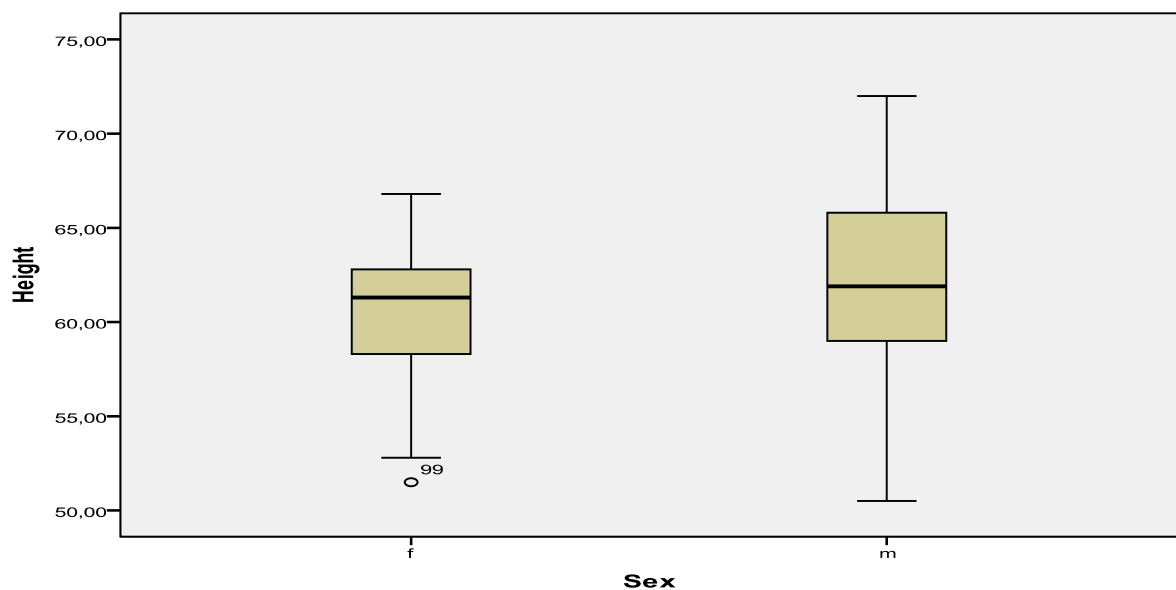
**Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>** Με βάση τα δεδομένα του αρχείου HeightWeight1.sav να εξετασθεί, αν είναι εφικτό, αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στο μέσο ύψος μεταξύ αγοριών και κοριτσιών.

Όπως πριν προκύπτουν τα ακόλουθα

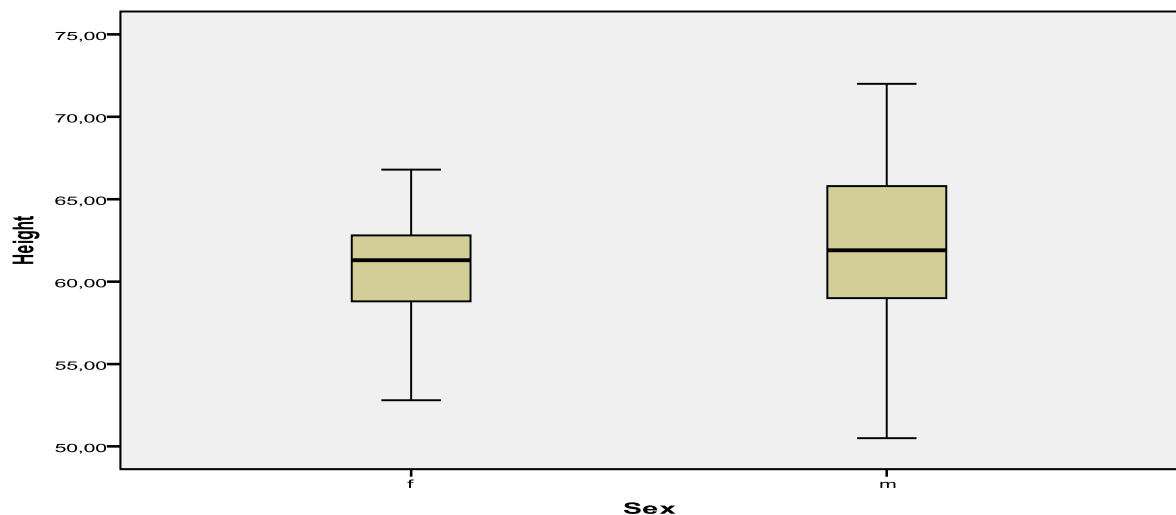


Από το θηκόγραμμα βλέπουμε ότι η ομάδα των αγοριών (m) δεν έχει ακραίες παρατηρήσεις, ενώ η ομάδα των κοριτσιών (f) έχει τουλάχιστον μία ακραία τιμή (βλ. αριστερά σχήμα). Αποκλείουμε την πιο απομακρυσμένη, που είναι η παρατήρηση 15 (προκύπτει από τον πίνακα Extreme Values). Την αποκλείουμε με τη γνωστή διαδικασία μέσω της επιλογής Data Select Cases και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο ύπαρξης ακραίων τιμών στις υπόλοιπες δειγματικές τιμές.

Προσοχή: Οι ακραίες τιμές αποκλείονται μία μία εντός κάθε δείγματος και μέχρι να ξεπεράσουμε σε αριθμό το 10% των διαθέσιμων παρατηρήσεων.



Η παρατήρηση 99 είναι ακραία. Αν διαγράψουμε την παρατήρηση αυτή και επαναλάβουμε τον έλεγχο θα δούμε ότι δεν υπάρχουν άλλες ακραίες παρατηρήσεις.



Συνολικά δηλαδή έχουμε για το δείγμα των κοριτσιών 2 ακραίες στις 111 διαθέσιμες, επομένως δεν έχουμε ξεπεράσει το 10%.

Υπόθεση κανονικότητας:

Από τον πίνακα που ακολουθεί προκύπτει ότι η υπόθεση της κανονικής κατανομής και για τους δύο πληθυσμούς δεν μπορεί να απορριφθεί.

**Tests of Normality**

Sex	Kolmogorov-Smirnov <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Height f	,108	109	,003	,979	109	,090
m	,069	126	,200*	,988	126	,374

a. Lilliefors Significance Correction

\*. This is a lower bound of the true significance.

Παραμετρικός έλεγχος

**Group Statistics**

Sex	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Height f	109	60,6936	3,14899	,30162
m	126	62,1032	4,27669	,38100

### Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Height	Equal variances assumed	13,851	,000	-2,839	233	,005	-1,40960	,49653	-2,38786	-,43133
	Equal variances not assumed			-2,901	227,400	,004	-1,40960	,48594	-2,36711	-,45208

Η υπόθεση της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων απορρίπτεται (τεστ Levene  $p$ -τιμή  $< 0,001$ ). Το μέσο ύψος αγοριών και κοριτσιών διαφέρει στατιστικά σημαντικά ( $p$ -τιμή  $= 0,004 < 0,05$ ) και μάλιστα το μέσο ύψος των αγοριών είναι στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερο (το καταλαβαίνουμε είτε από τον πίνακα Group Statistics είτε από πρόσημο του  $t$  τεστ ή/και της μέσης διαφοράς είτε από το 95% δ.ε. για τη μέση διαφορά).

**Αναφορά:** Θέλουμε να ελέγξουμε αν το μέσο ύψος αγοριών και κοριτσιών διαφέρει στατιστικά σημαντικά. Επομένως πρόκειται για έναν έλεγχο της ισότητας δύο μέσων τιμών με ανεξάρτητα δείγματα. Για να μπορούμε να αποφανθούμε χρησιμοποιώντας τον παραμετρικό έλεγχο του  $t$ -test με ανεξάρτητα δείγματα θα πρέπει να πληρούνται οι ακόλουθες υποθέσεις:

1. Τα δείγματά μας να είναι τυχαία επιλεγμένα
2. Να μην υπάρχουν ακραίες τιμές στα δειγματικά δεδομένα κάθε πληθυσμού που να ξεπερνούν σε ποσοστό το 10%.
3. Κάθε πληθυσμός να περιγράφεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή.

Η πρώτη από τις προϋποθέσεις σχετίζεται με τον τρόπο που επιλέξαμε τα δείγματά μας και ικανοποιείται.

Αρχικά ελέγχουμε την ύπαρξη ακραίων τιμών στις δειγματικές παρατηρήσεις που καταγράφεται το ύψος αγοριών και κοριτσιών αντίστοιχα. Ο έλεγχος της ύπαρξης ακραίων τιμών στις δειγματικές τιμές του ύψους των 111 γυναικών έδειξε ότι υπάρχουν δύο ακραίες τιμές (ποσοστό αριθμού ακραίων τιμών <10%) οι παρατηρήσεις με αύξοντα αριθμό 15 και 99 και ύψος 51.3 και 51.5 αντίστοιχα, ενώ ο έλεγχος της ύπαρξης ακραίων τιμών στις δειγματικές τιμές του ύψους των 128 ανδρών έδειξε ότι δεν υπάρχουν δύο ακραίες τιμές.

(βλέπε θηκογράμματα 1,2,3,4 στα σχήματα 1,2). Έπειτα καθώς το ποσοστό των ακραίων τιμών δεν ξεπερνά το 10% και αφού τις αποκλείσουμε από την περαιτέρω ανάλυση ελέγχουμε την υπόθεση ότι τα δύο δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς. Προκύπτει ότι ικανοποιείται τόσο η υπόθεση ότι οι δειγματικές τιμές του ύψους των αγοριών προέρχονται από κανονικό πληθυσμό (Shapiro Wilk, p-τιμή=0,374) όσο και η υπόθεση ότι οι δειγματικές τιμές του ύψους των κοριτσιών προέρχονται από κανονικό πληθυσμό (Shapiro Wilk, p-τιμή=0,090)

Επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τον παραμετρικό έλεγχο του τεστ για να ελέγξουμε την υπόθεση της ισότητας του μέσου ύψους αγοριών και κοριτσιών. Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι ποια μορφή του t τεστ θα χρησιμοποιηθεί καθορίζεται από την ικανοποίηση ή όχι της ισότητας των πληθυσμιακών διακυμάνσεων. Η υπόθεση της ισότητας των διακυμάνσεων απορρίπτεται (τεστ του Levene,  $F=13,851$ ,  $p\text{-value}<0,001$ ). Το μέσο ύψος αγοριών και κοριτσιών διαφέρει στατιστικά σημαντικά ( $p\text{-τιμή}=0,004<0.05$ ) και μάλιστα το μέσο ύψος των αγοριών είναι στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερο (δειγματική μέση τιμή ύψους αγοριών και κοριτσιών 62,1032 και 60,6936 αντίστοιχα) και ένα 95% Δ.Ε. για τη διαφορά: μέσο ύψους κοριτσιών-μέσο ύψος αγοριών είναι το (-2.36711,-0.45208).

**Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>** Στο αρχείο *CompanyProfit.sav*\* καταγράφονται τα κέρδη (Profit), σε χιλιάδες δολάρια, για δύο τύπους εταιρειών, τις Φαρμακευτικές (Pharmac) και τις εταιρείες υπολογιστών (Computer). Οι εταιρείες αυτές έχουν επιλεγεί με τυχαίο τρόπο από τις αντίστοιχες εταιρείες που δραστηριοποιούνται στην Ελλάδα. Να εξετασθεί αν είναι εφικτό αν το μέσο κέρδος των δυο τύπων εταιρειών διαφέρουν στατιστικά σημαντικά.

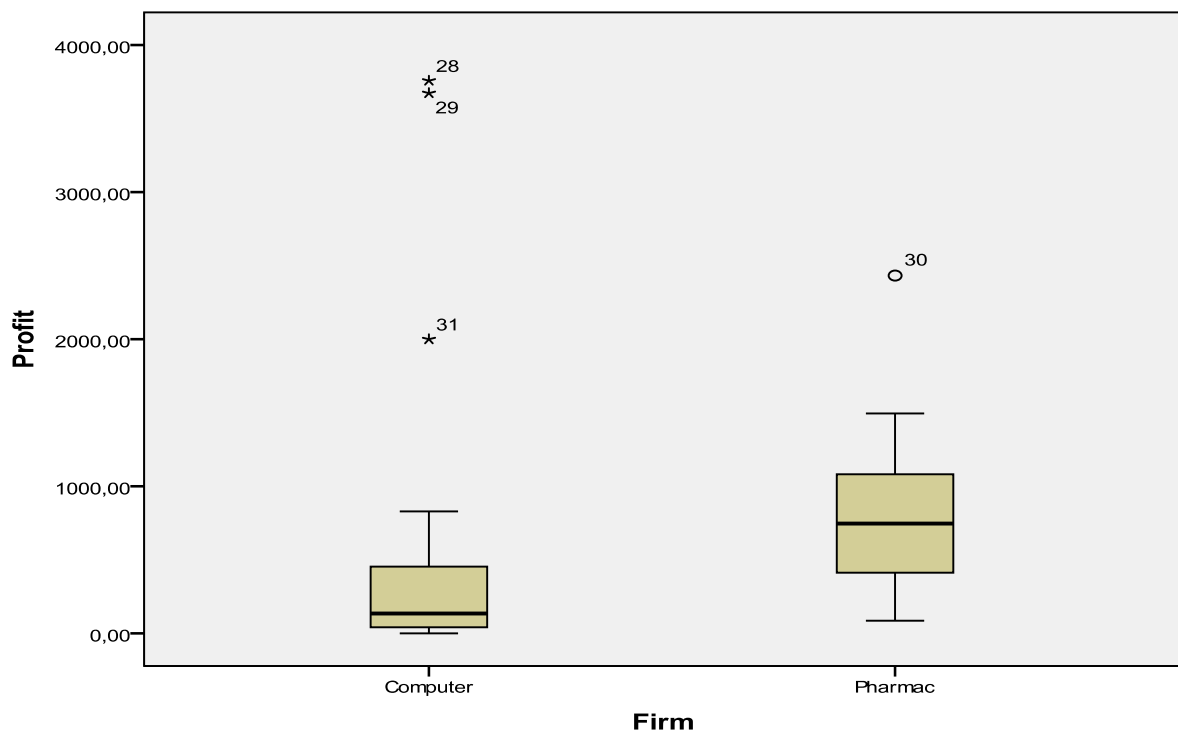
## Παράθεση Αποτελεσμάτων-Ανάλυση

Αρχικά παρατηρούμε ότι έχουμε διαθέσιμες 18 και 13 παρατηρήσεις αντίστοιχα που αφορούν τα κέρδη για εταιρείες υπολογιστών και φαρμακευτικές αντίστοιχα.

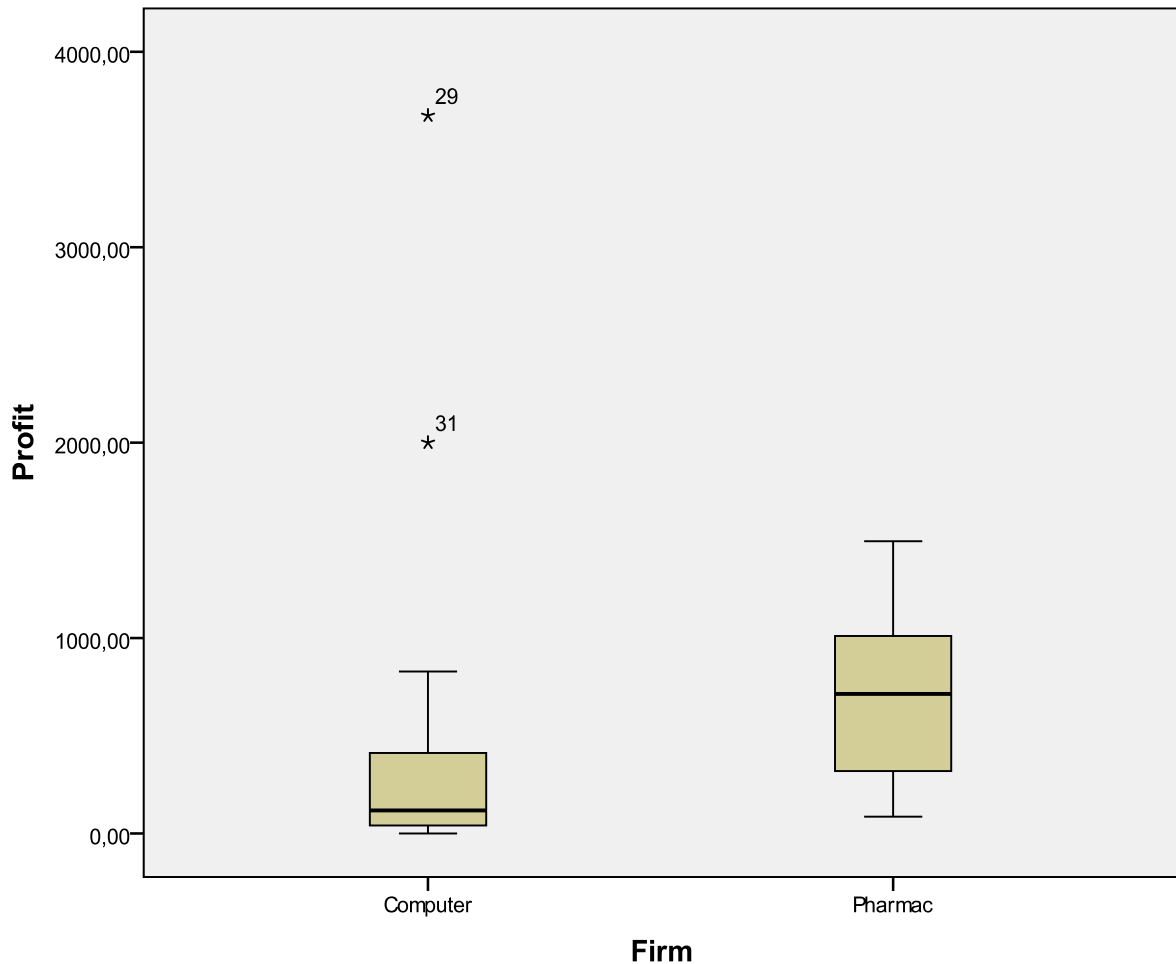
### Case Processing Summary

Firm	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
Profit Computer	18	100,0%	0	,0%	18	100,0%
Pharmac	13	100,0%	0	,0%	13	100,0%

**Έλεγχος ακραίων τιμών:** Από το θηκόγραμμα που έπεται προκύπτει αρχικά ότι στις δειγματικές τιμές του κέρδους των εταιρειών πληροφορικής υπάρχει τουλάχιστον μία ακραία τιμή η παρατήρηση με αύξοντα αριθμό 28. Επίσης προκύπτει ότι στις δειγματικές τιμές του κέρδους των φαρμακευτικών εταιρειών υπάρχει τουλάχιστον μία ακραία τιμή η παρατήρηση με αύξοντα αριθμό 30. Οι παρατηρήσεις αυτές αποκλείονται από την περαιτέρω ανάλυση και διενεργείται πάλι έλεγχος ακραίων τιμών.

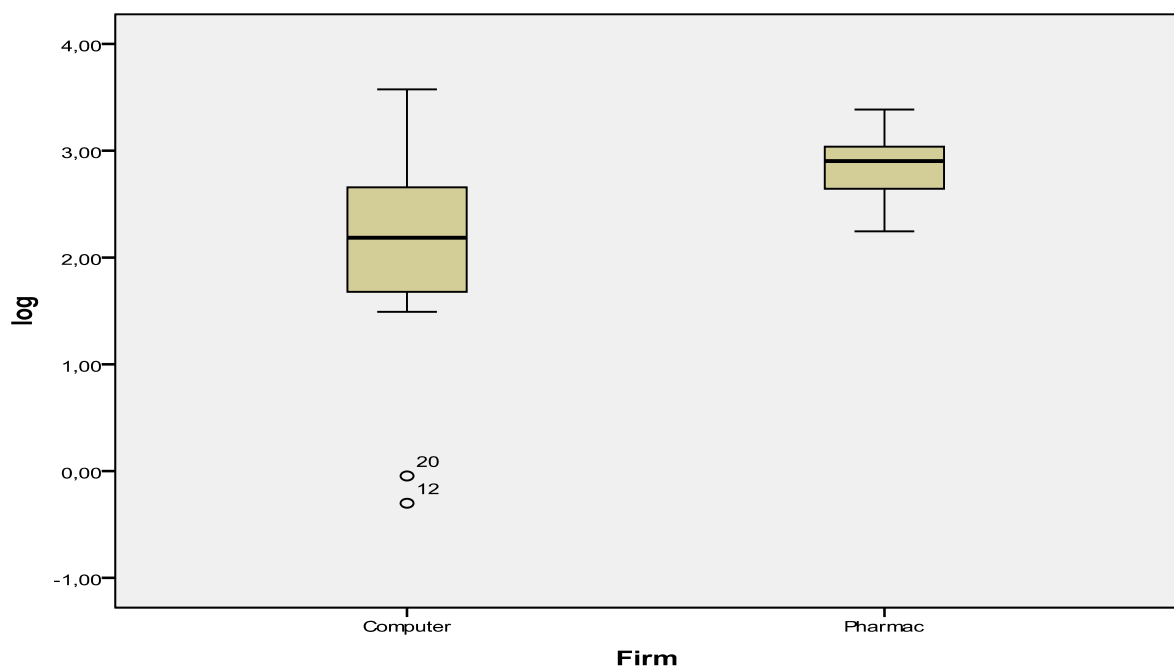
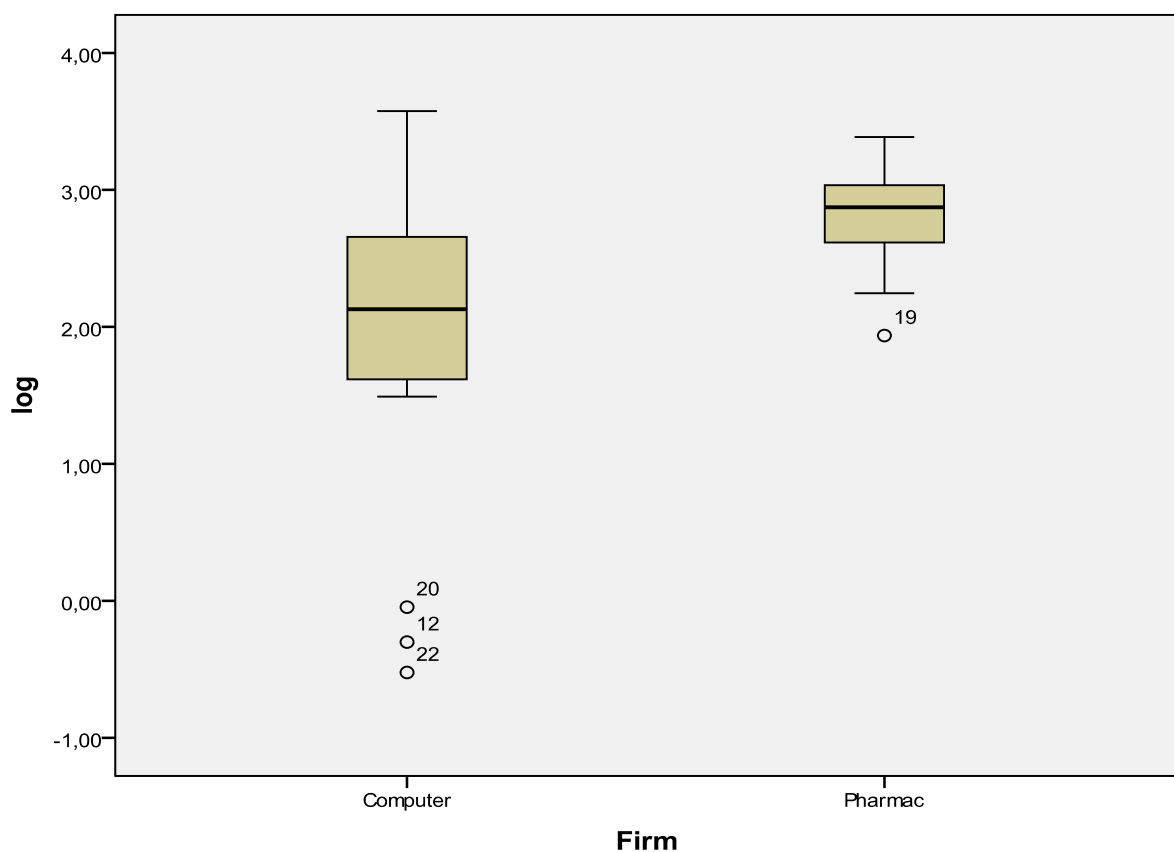


Από το θηκόγραμμα που ακολουθεί προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον μία ακόμη ακραία τιμή στις δειγματικές τιμές του κέρδους των εταιρειών πληροφορικής η παρατήρηση με αύξοντα αριθμό 29, ενώ δεν προκύπτει άλλη ακραία τιμή στις δειγματικές τιμές του κέρδους των φαρμακευτικών εταιρειών. Επομένως συνολικά στις δειγματικές τιμές του κέρδους των εταιρειών πληροφορικής υπάρχουν τουλάχιστον δύο ακραίες τιμές στις διαθέσιμες 18 και επομένως ο αριθμός των ακραίων τιμών εντός αυτού του δείγματος ξεπερνά το 10%.



Άρα επαναφέρουμε όλες τις τιμές, προχωράμε σε λογαριθμικό μετασχηματισμό των δεδομένων μας για την διόρθωση του προβλήματος των ακραίων παρατηρήσεων (πάλι επισημαίνεται ότι θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στην ύπαρξη μη θετικών τιμών στην υπό μετασχηματισμό μεταβλητή). Διεξάγεται στη συνέχεια έλεγχος ύπαρξης ακραίων τιμών στις δειγματικές τιμές του λογαρίθμου του κέρδους των εταιρειών πληροφορικής και των εταιριών των σχετικών με το εμπόριο φαρμάκων. Προκύπτουν τότε κατά σειρά και με τη γνωστή διαδικασία τα ακόλουθα θηκογράμματα:

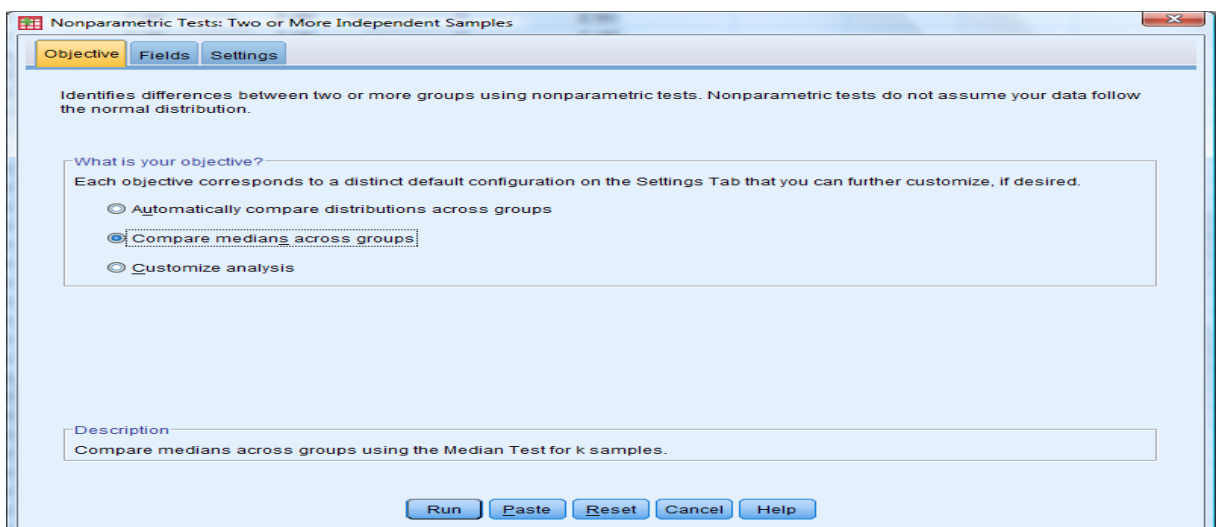
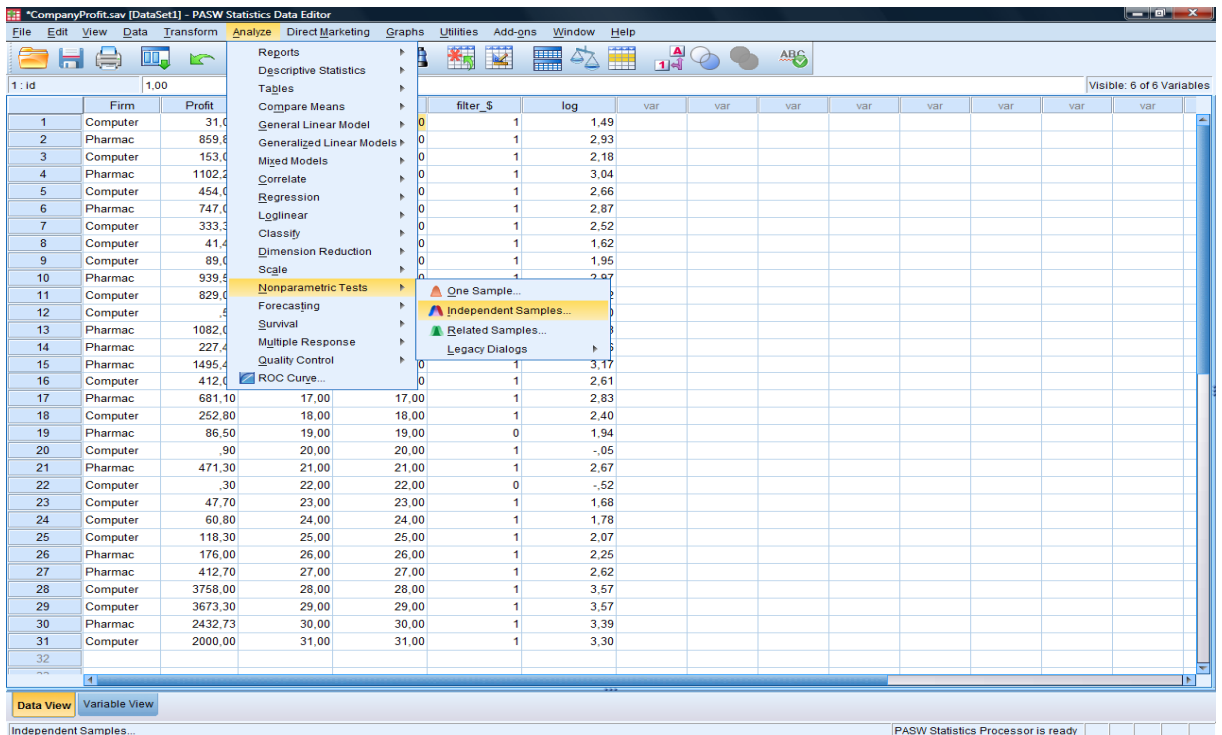


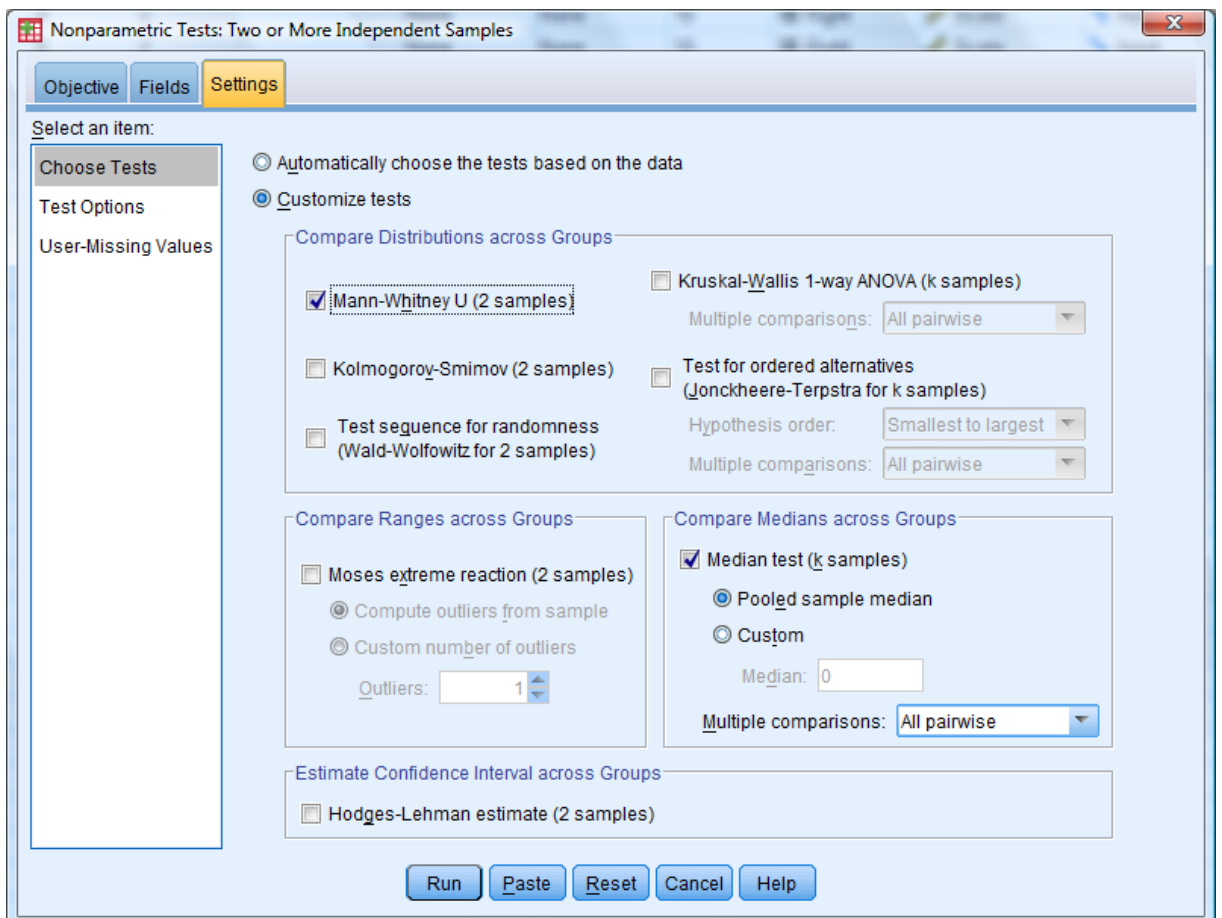
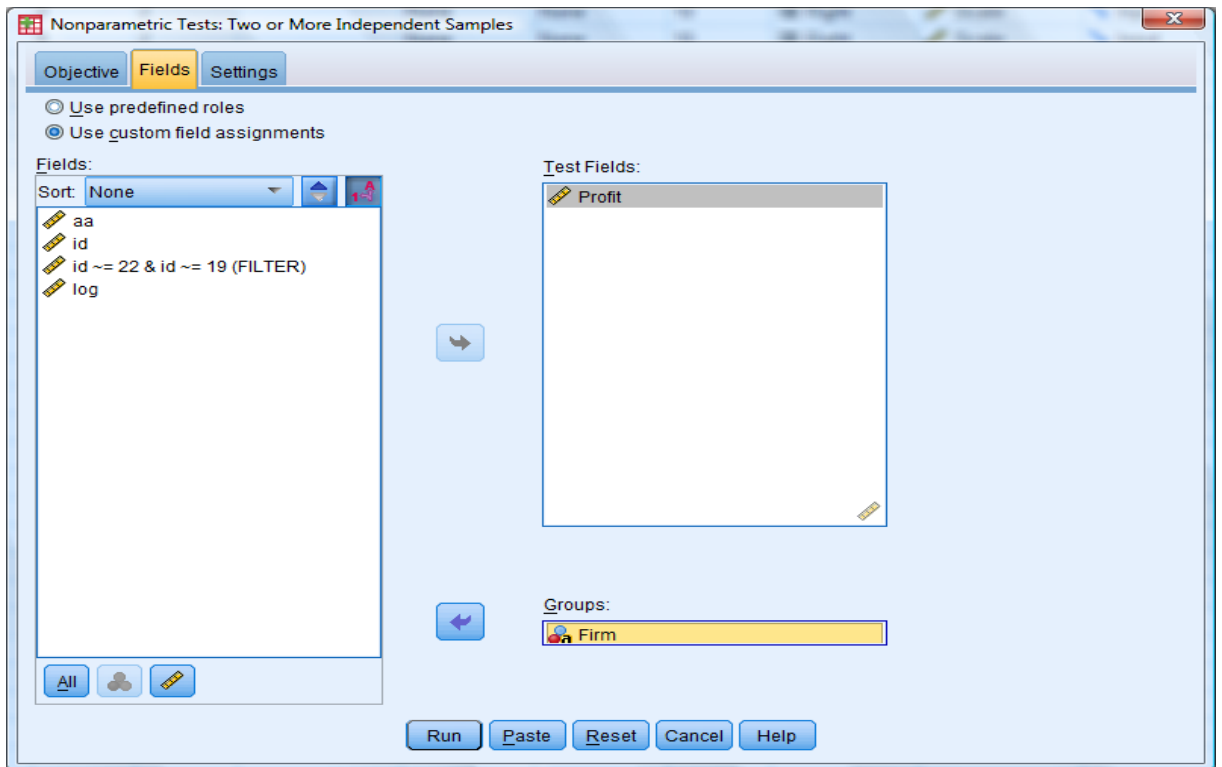


Επομένως ο μετασχηματισμός του λογαρίθμου δε διορθώνει το πρόβλημα της ύπαρξης ακραίων τιμών. Αφού επαναφέρουμε όλες τις παρατηρήσεις προβαίνουμε σε μη παραμετρικό έλεγχο της υπόθεσης της ισότητας των πληθυσμιακών διαμέσων του κέρδους

των δύο τύπων εταιρειών και θα εξεταστεί έπειτα κατά πόσο τα αποτελέσματα αυτού γενικεύονται στις πληθυσμιακές μέσες τιμές.

**Μη παραμετρικός έλεγχος** (αφού επαναφέρουμε όλες τις παρατηρήσεις και ακολουθώντας τη διαδικασία Nonparametric Tests Independent Samples).



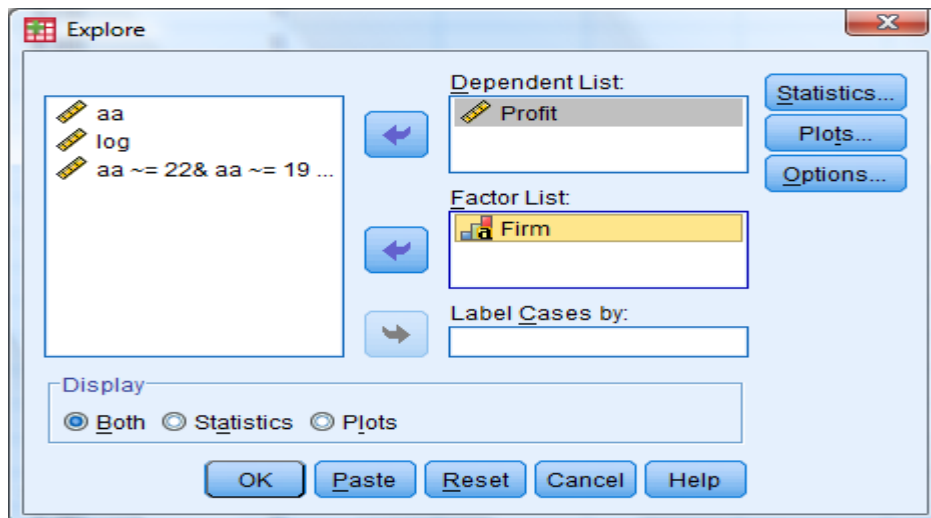


### Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of Profit is the same across categories of Firm.	Independent-Samples Mann-Whitney U Test	.025	Reject the null hypothesis.
2	The medians of Profit are the same across categories of Firm.	Independent-Samples Median Test	.007	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .05.

Η κρίσιμη πιθανότητα που μας έδωσε το τεστ αυτό είναι  $p=0,007$ . Σαν συμπέρασμα έχουμε ότι για επίπεδο σημαντικότητας 5% η διάμεσος του κέρδους των φαρμακευτικών εταιρειών διαφέρει στατιστικά σημαντικά από αυτό των εταιρειών των υπολογιστών. Για να μπορούν να γενικευτούν τα αποτελέσματα για το μέσο κέρδος θα πρέπει η δειγματική μέση τιμή και η αντίστοιχη διάμεσος να είναι αρκετά κοντά. Για να το εξετάσουμε αυτό επιλέγουμε μέσω της διαδικασίας Analyze Descriptive Statistics Explore τα ακόλουθα:



Από τον πίνακα που προκύπτει έχουμε ότι για τις εταιρείες πληροφορικής η δειγματική μέση τιμή και διάμεσος του κέρδους είναι αντίστοιχα 680,8500 και 135,6500 αντίστοιχα ενώ οι αντίστοιχες τιμές για τις φαρμακευτικές εταιρείες είναι 824,1254 και 747. Άρα τα αποτελέσματα δεν γενικεύονται στις πληθυσμιακές μέσες τιμές, καθώς τα δεδομένα δεν είναι συμμετρικά.

## Descriptives

Firm			Statistic	Std. Error	
Profit	Computer	Mean	680,8500	283,32610	
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	83,0842	
			Upper Bound	1278,6158	
		5% Trimmed Mean	547,7056		
		Median	135,6500		
		Variance	1444926,267		
		Std. Deviation	1202,05086		
		Minimum	,30		
		Maximum	3758,00		
		Range	3757,70		
		Interquartile Range	508,95		
		Skewness	2,117	,536	
		Kurtosis	3,395	1,038	
	Pharmac	Mean	824,1254	176,08687	
		95% Confidence Interval for Mean	Lower Bound	440,4651	
			Upper Bound	1207,7857	
		5% Trimmed Mean	775,7376		
		Median	747,0000		
		Variance	403085,608		
		Std. Deviation	634,89023		
		Minimum	86,50		
		Maximum	2432,73		
		Range	2346,23		
		Interquartile Range	772,05		
		Skewness	1,348	,616	
		Kurtosis	2,482	1,191	

**Αναφορά:** Θέλουμε να ελέγξουμε αν το μέσο κέρδος εταιρειών πληροφορικής και φαρμακευτικών εταιρειών διαφέρει στατιστικά σημαντικά. Επομένως πρόκειται για έναν έλεγχο της ισότητας δύο μέσων τιμών με ανεξάρτητα δείγματα. Για να μπορούμε να αποφανθούμε χρησιμοποιώντας τον παραμετρικό έλεγχο του t-test με ανεξάρτητα δείγματα θα πρέπει να πληρούνται οι ακόλουθες υποθέσεις:

1. Τα δείγματά μας να είναι τυχαία επιλεγμένα
2. Να μην υπάρχουν ακραίες τιμές στα δειγματικά δεδομένα κάθε πληθυσμού που να ξεπερνούν σε ποσοστό το 10%.
3. Κάθε πληθυσμός να περιγράφεται ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή.

Η πρώτη από τις προϋποθέσεις σχετίζεται με τον τρόπο που επιλέξαμε τα δείγματά μας και ικανοποιείται.

Αρχικά ελέγχουμε την ύπαρξη ακραίων τιμών στις δειγματικές παρατηρήσεις που καταγράφεται το ύψος αγοριών και κοριτσιών αντίστοιχα. Ο έλεγχος της ύπαρξης ακραίων τιμών στις δειγματικές τιμές του κέρδους των 18 εταιρειών πληροφορικής έδειξε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο ακραίες τιμές (ποσοστό αριθμού ακραίων τιμών  $>10\%$ ) οι παρατηρήσεις με αύξοντα αριθμό 28 και 29 και κέρδος 3758 και 3673.3 αντίστοιχα, ενώ ο έλεγχος της ύπαρξης ακραίων τιμών στις δειγματικές τιμές του κέρδους των 13 φαρμακευτικών εταιρειών έδειξε ότι υπάρχει μία ακραία τιμή η παρατήρηση με αύξοντα αριθμό 30 και τιμή 2432,73 (βλέπε θηκογράμματα 1,2,3,4 στα σχήματα 1,2). Έπειτα καθώς το ποσοστό των ακραίων τιμών ξεπερνά το 10% εξετάζουμε αν ο μετασχηματισμός του λογαρίθμου διορθώνει το πρόβλημα. Ο μετασχηματισμός του λογαρίθμου δε διορθώνει το πρόβλημα καθώς ο έλεγχος της ύπαρξης ακραίων τιμών στις δειγματικές τιμές του λογαρίθμου του κέρδους των 18 εταιρειών πληροφορικής έδειξε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο ακραίες τιμές (ποσοστό αριθμού ακραίων τιμών  $>10\%$ ) οι παρατηρήσεις με αύξοντα αριθμό 22 και 12, ενώ ο έλεγχος της ύπαρξης ακραίων τιμών στις δειγματικές τιμές του λογαρίθμου του κέρδους των 13 φαρμακευτικών εταιρειών έδειξε ότι υπάρχει μία ακραία τιμή η παρατήρηση με αύξοντα αριθμό 19 (βλέπε θηκογράμματα 1,2,3,4 στα σχήματα 3,4). Επομένως αφού επαναφέρουμε όλες τις δειγματικές παρατηρήσεις θα χρησιμοποιήσουμε τον μη παραμετρικό έλεγχο για να ελέγξουμε την υπόθεση της ισότητας των πληθυσμιακών διαμέσων του κέρδους των δύο τύπων εταιρειών. Σαν συμπέρασμα έχουμε ότι για επίπεδο σημαντικότητας 5% η διάμεσος του κέρδους των φαρμακευτικών εταιρειών διαφέρει από αυτή των εταιρειών των υπολογιστών (Median Test,  $p$ -τιμή=0.007, δειγματικές τιμές της διαμέσου του κέρδους 135,65 και 747 αντίστοιχα). Για να μπορούν να γενικευτούν τα αποτελέσματα για το μέσο κέρδος θα πρέπει η δειγματική μέση τιμή και η αντίστοιχη διάμεσος να είναι αρκετά κοντά. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει καθώς για τις εταιρείες πληροφορικής η δειγματική μέση τιμή και διάμεσος του κέρδους είναι αντίστοιχα 680,8500 και 135,6500 αντίστοιχα ενώ οι αντίστοιχες τιμές για τις φαρμακευτικές εταιρείες είναι 824,1254 και 747. Άρα τα αποτελέσματα δεν γενικεύονται στις πληθυσμιακές μέσες τιμές.