Ορίζουμε τον a – posteriori κίνδυνο[1] για έναν κανόνα απόφασης $a=a(x)$ ως την μέση τιμή:

$$PR(a\,|\,x)=\mathbb{E}\left[L(\vartheta,a)\,|\,x\right]=\int_{\Theta}L(\vartheta,a)\Pi(d\vartheta\,|\,x),$$

όπου $L(\vartheta,a)\geq 0$ η συνάρτηση απώλειας[2], που είναι ένα μέτρο της απώλειας που επωμιζόμαστε όταν αντικαθιστούμε την πραγματική τιμή ϑ με την εκτίμηση a. Ζητάμε τότε την άριστη απόφαση a^{*} έτσι ώστε

$$PR\left(a^{*}\,|\,x\right)=\inf_{a\in\Theta}\mathbb{E}\left\{L(\vartheta,a)\,|\,x\right\}.$$

Για παράδειγμα θέτοντας $L(\vartheta,a)=(\vartheta-a)^{2}$ (τετραγωνική συνάρτηση απώλειας) που είναι συμμετρική (ως προς την πραγματική τιμή ϑ) και κυρτή συνάρτηση του a έχουμε:

<u>Πρόταση</u>

Κάτω από την τετραγωνική συνάρτηση απώλειας $L(\vartheta,a)=(\vartheta-a)^{2}$, η κατά Bayes εκτίμηση του ϑ, είναι $a^{*}=a^{*}(x)=\mathbb{E}[\vartheta\,|\,x]$, με ελάχιστη απώλεια $Var[\vartheta\,|\,x]$.

$$\frac{\partial}{\partial a}PR(a\,|\,x)=\frac{\partial}{\partial a}\int_{\Theta}(\vartheta-a)^{2}\,\Pi(d\vartheta\,|\,x)=-2\int_{\Theta}(\vartheta-a)\Pi(d\vartheta\,|\,x)$$

$$=-2\left\{\int_{\Theta}\vartheta\Pi(d\vartheta\,|\,x)-a\int_{\Theta}\Pi(d\vartheta\,|\,x)\right\}=-2\left\{\mathbb{E}[\vartheta\,|\,x]-a\right\}=0.$$

$$\frac{\partial^{2}}{\partial a^{2}}PR(a\,|\,x)=-2\frac{\partial}{\partial a}\int_{\Theta}(\vartheta-a)\Pi(d\vartheta\,|\,x)=2\int_{\Theta}\Pi(d\vartheta\,|\,x)=2,$$

και ελάχιστη απώλεια θα είναι:

$$PR\left(a^{*}\,|\,x\right)=PR\left(\mathbb{E}[\vartheta\,|\,x]\,|\,x\right)=\int_{\Theta}\left\{\vartheta-\mathbb{E}[\vartheta\,|\,x]\right\}^{2}\Pi(d\vartheta\,|\,x)=Var[\vartheta\,|\,x].$$

Εναλλακτικά

[1] Posterior risk.

[2] Loss function.

$$PR(a\mid x)=\int_{\Theta}(\vartheta-a)^2\,\Pi(d\vartheta\mid x)=\int_{\Theta}\vartheta^2\,\Pi(d\vartheta\mid x)-2a\int_{\Theta}\vartheta\,\Pi(d\vartheta\mid x)+a^2$$

$$=\mathbb{E}\left[\vartheta^2\mid x\right]-2a\mathbb{E}\left[\vartheta\mid x\right]+a^2=\mathbb{E}\left[\vartheta\mid x\right]^2-2a\mathbb{E}\left[\vartheta\mid x\right]+a^2+\left\{\mathbb{E}\left[\vartheta^2\mid x\right]-\mathbb{E}\left[\vartheta\mid x\right]^2\right\}$$

$$=\left\{a-\mathbb{E}\left[\vartheta\mid x\right]\right\}^2+Var\left[\vartheta\mid x\right]\Rightarrow a^*=\mathbb{E}\left[\vartheta\mid x\right].$$

<u>Πρόταση</u>

Η κατά τόπους γραμμική (piecewise linear) συνάρτηση απώλειας:

$$L(\vartheta,a)=\begin{Bmatrix}k_0\left(a-\vartheta\right),\ a>\vartheta\\ k_1\left(\vartheta-a\right),\ a\le\vartheta\end{Bmatrix},\ k_0>0,\ k_1>0,$$

δίνει ποινή $k_0\left(a-\vartheta\right)$ όταν $a>\vartheta$ και $k_1\left(\vartheta-a\right)$ όταν $a\le\vartheta$. Η **άριστη επιλογή** a^* **είναι το** $\frac{k_1}{k_0+k_1}$ – **ποσοστιαίο σημείο**[3] **της posterior**. Δηλαδή το a^* με την ιδιότητα

$$P\left\{\vartheta\le a^*\mid x\right\}=\frac{k_1}{k_0+k_1}.$$

Για να το δούμε αυτό θεωρούμε την διαφορά:

$$L\left(\vartheta,a^*\right)-L(\vartheta,a)=\begin{Bmatrix}k_0\left(a^*-\vartheta\right),\ a^*>\vartheta\\ k_1\left(\vartheta-a^*\right),\ a^*\le\vartheta\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}k_0\left(a-\vartheta\right),\ a>\vartheta\\ k_1\left(\vartheta-a\right),\ a\le\vartheta\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}k_0\left(a^*-\vartheta\right),\ \vartheta<a^*<a\\ k_1\left(\vartheta-a^*\right),\ a^*<\vartheta<a\\ k_1\left(\vartheta-a^*\right),\ a^*<a<\vartheta\\ k_0\left(a^*-\vartheta\right),\ \vartheta<a<a^*\\ k_0\left(a^*-\vartheta\right),\ a<\vartheta<a^*\\ k_1\left(\vartheta-a^*\right),\ a<a^*<\vartheta\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}k_0\left(a-\vartheta\right),\ \vartheta<a^*<a\\ k_0\left(a-\vartheta\right),\ a^*<\vartheta<a\\ k_1\left(\vartheta-a\right),\ a^*<a<\vartheta\\ k_0\left(a-\vartheta\right),\ \vartheta<a<a^*\\ k_1\left(\vartheta-a\right),\ a<\vartheta<a^*\\ k_1\left(\vartheta-a\right),\ a<a^*<\vartheta\end{Bmatrix}$$

[3] Percentile.

$$=\begin{cases} k_0\left(a^*-a\right), & \vartheta<a^*<a \\ k_1\underbrace{\left(\vartheta-a^*\right)}_{<a-a^*}+k_0\underbrace{\left(\vartheta-a\right)}_{<0}, & a^*<\vartheta<a \\ k_1\left(a-a^*\right), & a^*<a<\vartheta \\ k_0\left(a^*-a\right), & \vartheta<a<a^* \\ k_0\underbrace{\left(a^*-\vartheta\right)}_{<a^*-a}+k_1\underbrace{\left(a-\vartheta\right)}_{<0}, & a<\vartheta<a^* \\ k_1\left(a-\vartheta\right), & a<a^*<\vartheta \end{cases} \le \begin{cases} k_0\left(a^*-a\right), \vartheta<a^*<a \\ k_1\left(a-a^*\right), a^*<\vartheta<a \\ k_1\left(a-a^*\right), a^*<a<\vartheta \\ k_0\left(a^*-a\right), \vartheta<a<a^* \\ k_0\left(a^*-a\right), a<\vartheta<a^* \\ k_1\left(a-a^*\right), a<a^*<\vartheta \end{cases} = \begin{cases} k_0\left(a^*-a\right), \vartheta<a^* \\ k_1\left(a-a^*\right), \vartheta>a^* \end{cases}$$

Δηλαδή δείξαμε ότι:

$$L\left(\vartheta,a^*\right)-L\left(\vartheta,a\right)\le\begin{cases} k_0\left(a^*-a\right), \vartheta<a^* \\ k_1\left(a-a^*\right), \vartheta>a^* \end{cases}=k_0\left(a^*-a\right)1\left(\vartheta<a^*\right)+k_1\left(a-a^*\right)1\left(\vartheta>a^*\right).$$

Παίρνοντας την μέση τιμή ως προς το posterior μέτρο $\Pi\left(d\vartheta\,|\,x\right)$, η προηγούμενη ανισότητα δίνει

$$PR\left(a^*\,|\,x\right)-PR\left(a\,|\,x\right)=\int_{\Theta}\left(L\left(\vartheta,a^*\right)-L\left(\vartheta,a\right)\right)\Pi\left(d\vartheta\,|\,x\right)$$

$$\le\int_{\Theta}\left\{k_0\left(a^*-a\right)1\left(\vartheta<a^*\right)+k_1\left(a-a^*\right)1\left(\vartheta>a^*\right)\right\}\Pi\left(d\vartheta\,|\,x\right)$$

$$=\int_{\vartheta=-\infty}^{a^*}k_0\left(a^*-a\right)\Pi\left(d\vartheta\,|\,x\right)+\int_{\vartheta=a^*}^{\infty}k_1\left(a-a^*\right)\Pi\left(d\vartheta\,|\,x\right)$$

$$=k_0\left(a^*-a\right)\int_{\vartheta=-\infty}^{a^*}\Pi\left(d\vartheta\,|\,x\right)+k_1\left(a-a^*\right)\int_{\vartheta=a^*}^{\infty}\Pi\left(d\vartheta\,|\,x\right)$$

$$=k_0\left(a^*-a\right)P\left\{\vartheta\le a^*\,|\,x\right\}+k_1\left(a-a^*\right)\left(1-P\left\{\vartheta\le a^*\,|\,x\right\}\right)$$

$$=\left(a^*-a\right)\frac{k_1k_0}{k_0+k_1}+k_1\left(a-a^*\right)\frac{k_1k_0}{k_0+k_1}=0\,.$$

Ισχύει λοιπόν ότι

$$L\left(\vartheta,a^*\right)\le L\left(\vartheta,a\right),\ \forall a\in\Theta\,.$$

Θέτοντας $k_0 = k_1 = k$ παίρνουμε $P\left\{\vartheta \le a^* \mid x\right\} = \frac{1}{2}$ δηλαδή το a^* είναι η a – posteriori διάμεσος (posterior median).

Η εύρεση του βέλτιστου a^* όταν η συνάρτηση απώλειας είναι γραμμική μπορεί να γίνει και με παραγώγιση. Έστω $k_0 = k_1 = k$ τότε $L(\vartheta, a) = k\left|\vartheta - a\right|, k > 0$.

$$\frac{\partial}{\partial a} PR(a \mid x) = \frac{\partial}{\partial a} \int_{\Theta} k\left|\vartheta - a\right| \Pi(d\vartheta \mid x)$$

$$= k\left\{\frac{\partial}{\partial a} \int_{\vartheta=a}^{\infty} (\vartheta - a)\Pi(d\vartheta \mid x) - \frac{\partial}{\partial a} \int_{\vartheta=-\infty}^{a} (\vartheta - a)\Pi(d\vartheta \mid x)\right\}$$

$$= k\left\{\lim_{\xi\to\infty} \frac{\partial}{\partial a} \int_{\vartheta=a}^{\xi} (\vartheta - a)\Pi(d\vartheta \mid x) - \lim_{\xi\to-\infty} \frac{\partial}{\partial a} \int_{\vartheta=\xi}^{a} (\vartheta - a)\Pi(d\vartheta \mid x)\right\}$$

Επειδή

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{A(a)}^{B(a)} \varphi(a, \vartheta) d\vartheta = \int_{A(a)}^{B(a)} \frac{\partial \varphi(a, \vartheta)}{\partial a} d\vartheta + \varphi(a, B(a))\frac{dB(a)}{da} - \varphi(a, A(a))\frac{dA(a)}{da},$$

παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{\vartheta=a}^{\xi} (\vartheta - a)\Pi(d\vartheta \mid x) = -\int_{\vartheta=a}^{\xi} \Pi(d\vartheta \mid x) + 0 - 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{\vartheta=\xi}^{a} (\vartheta - a)\Pi(d\vartheta \mid x) = -\int_{\vartheta=\xi}^{a} \Pi(d\vartheta \mid x) + 0 - 0.$$

Και έτσι

$$\frac{\partial}{\partial a} PR(a \mid x) = k\left\{-\int_{\vartheta=a}^{\infty} \Pi(d\vartheta \mid x) + \int_{\vartheta=-\infty}^{a} \Pi(d\vartheta \mid x)\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\vartheta=-\infty}^{a} \Pi(d\vartheta \mid x) = \int_{\vartheta=a}^{\infty} \Pi(d\vartheta \mid x) \Leftrightarrow P\left\{\vartheta > a \mid x\right\} = P\left\{\vartheta < a \mid x\right\}.$$

Δηλαδή το a^* είναι η a – posteriori διάμεσος (posterior median), εφόσον

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} PR\left(a \mid x\right) = k \frac{\partial}{\partial a}\left\{ -\int_{\vartheta=a}^{\infty} \pi\left(\vartheta \mid x\right) d\vartheta + \int_{\vartheta=-\infty}^{a} \pi\left(\vartheta \mid x\right) d\vartheta \right\}$$

$$= k\left\{ -\left(0+0-\pi\left(a \mid x\right)\right) + \left(0+\pi\left(a \mid x\right)-0\right)\right\} = 2k\pi\left(a \mid x\right) > 0 \, .$$

Ενώ έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} PR\left(a \mid x\right) = k \frac{\partial}{\partial a}\left\{ -\int_{\vartheta=a}^{\infty} \pi\left(\vartheta \mid x\right) d\vartheta + \int_{\vartheta=-\infty}^{a} \pi\left(\vartheta \mid x\right) d\vartheta \right\}$$

$$= k\left\{ -\left(0+0-\pi\left(a \mid x\right)\right) + \left(0+\pi\left(a \mid x\right)-0\right)\right\} = 2k\pi\left(a \mid x\right) > 0$$

<u>Άσκηση</u>

Δείξτε την γενική περίπτωση χρησιμοποιώντας παραγώγιση.

$$\frac{\partial}{\partial a} PR\left(a \mid x\right) = \frac{\partial}{\partial a}\int_{\Theta} \left\{ k_0\left(a-\vartheta\right)1\left(a>\vartheta\right) + k_1\left(\vartheta-a\right)1\left(a \le \vartheta\right)\right\}\Pi\left(d\vartheta \mid x\right)$$

$$= k_0 \int_{\vartheta=-\infty}^{a} \Pi\left(d\vartheta \mid x\right) - k_1 \int_{\vartheta=a}^{\infty} \Pi\left(d\vartheta \mid x\right) = 0$$

$$\Rightarrow k_0 P\left\{\vartheta < a \mid x\right\} = k_1 P\left\{\vartheta \ge a \mid x\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} k_0 P\left\{\vartheta < a \mid x\right\} = k_1\left(1-P\left\{\vartheta < a \mid x\right\}\right) \\ k_0\left(1-P\left\{\vartheta \ge a \mid x\right\}\right) = k_1 P\left\{\vartheta \ge a \mid x\right\} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P\left\{\vartheta < a \mid x\right\} = \dfrac{k_1}{k_0+k_1} \\ P\left\{\vartheta \ge a \mid x\right\} = \dfrac{k_0}{k_0+k_1} \end{array} \right\}$$

Δηλαδή το a^* είναι το a – posteriori $\frac{k_1}{k_0+k_1}$ **ποσοστιαίο σημείο**.

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} PR\left(a \mid x\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left\{ k_0 \int_{\vartheta=-\infty}^{a} \pi\left(\vartheta \mid x\right) d\vartheta - k_1 \int_{\vartheta=a}^{\infty} \pi\left(\vartheta \mid x\right) d\vartheta \right\} = \left(k_0+k_1\right)\pi\left(a \mid x\right) > 0 \, .$$

Η $0-1$ συνάρτηση απώλειας.

Κάτω από τη συνάρτηση απώλειας

$$L(\vartheta,a)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\mathcal{I}\left(\left|\vartheta-a\right|\geq\varepsilon\right)=1-\lim_{\varepsilon\to 0+}\mathcal{I}\left(\left|\vartheta-a\right|<\varepsilon\right)=1-\delta(\vartheta-a),$$

η κατά Bayes σημειακή εκτίμηση a^* του ϑ είναι το posterior mode (maximum a-posteriori MAP estimate)

$$a^*=a^*(x)=\max_{\vartheta\in\Theta}\pi(\vartheta\,|\,x).$$

Πράγματι

$$PR\left(a^*\,|\,x\right)=\inf_{a\in\Theta}\int_{\Theta}L(\vartheta,a)\pi(\vartheta\,|\,x)\,d\vartheta=\inf_{a\in\Theta}\int_{\Theta}\left\{1-\delta(\vartheta-a)\right\}\pi(\vartheta\,|\,x)\,d\vartheta=\inf_{a\in\Theta}\left\{1-\pi(a\,|\,x)\right\}$$

από όπου $a^*=\max_{a\in\Theta}\pi(a\,|\,x)$.