

ΠΑΡΑΓΩΓΑ

Στέλιος Ξανθόπουλος

Εισαγωγικά

- Ένα **παράγωγο συμβόλαιο** είναι ένα αξιόγραφο η αξία του οποίου εξαρτάται από τις αξίες άλλων «πιο βασικών» υποκείμενων μεταβλητών.
- Τα παράγωγα συμβόλαια είναι επίσης γνωστά και με τον όρο «**ενδεχόμενες (ή υπό όρους) απαιτήσεις**» ή και «**συγκυριακά συμβόλαια**».

- Σε κάθε παράγωγο συμβόλαιο υπάρχουν **δύο αντισυμβαλλόμενοι**, ο «αγοραστής» του συμβολαίου και ο «πωλητής» του συμβολαίου.
- Αντίστοιχα δημιουργούνται δύο αντίθετες **θέσεις** στο συμβόλαιο, η “*long*” θέση και η “*short*” θέση.

- Συνήθως οι υποκείμενες μεταβλητές των παραγώγων συμβολαίων είναι οι τιμές εμπορεύσιμων αξιόγραφων, π.χ. ένα δικαίωμα επί μιας μετοχής είναι ένα αξιόγραφο που η αξία του εξαρτάται από την τιμή της υποκείμενης μετοχής.
- Όμως τα παράγωγα συμβόλαια μπορούν να έχουν ως υποκείμενη μεταβλητή σχεδόν οτιδήποτε, από την τιμή του χρυσού έως το ύψος του χιονιού σε ένα χιονοδρομικό κέντρο έως την ποσότητα των αιωρουμένων σωματιδίων στο κέντρο της πόλης, έως την τιμή άλλων παραγώγων κλπ.

Βασικά είδη παραγώγων

- Προθεσμιακές συμφωνίες (Forwards, Futures (ΣΜΕ))
- Δικαιώματα (Options)
- Ανταλλαγές (Swaps)
- Εγγυήσεις (Warrants)

Προθεσμιακά Συμβόλαια
(Forwards)
&
Συμβόλαια Μελλοντικής
Εκπλήρωσης
(Futures)

Ορισμοί

- Ένα **προθεσμιακό συμβόλαιο (forward contract)** επί κάποιου υποκείμενου στοιχείου είναι ένα συμβόλαιο σύμφωνα με το οποίο οι δύο αντισυμβαλλόμενοι, συμφωνούν έτσι ώστε ο «αγοραστής» *υποχρεούται* να αγοράσει από τον «πωλητή» (και ο πωλητής *υποχρεούται* να πουλήσει στον αγοραστή) το υποκείμενο στοιχείο σε μια προσυμφωνημένη μελλοντική στιγμή και σε μια προσυμφωνημένη τιμή.
 - Ένα **Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) (futures contract)** ορίζεται όπως και ένα προθεσμιακό συμβόλαιο αλλά διαπραγματεύεται σε οργανωμένο χρηματιστήριο παραγώγων. Παρακάτω θα δούμε τις διαφορές και τις τεχνικές ιδιαιτερότητες των προθεσμιακών συμβολαίων και των ΣΜΕ.
- Λέμε ότι ο αγοραστής του συμβολαίου έχει μια **long θέση** στο συμβόλαιο ενώ ο πωλητής έχει μια **short θέση** στο συμβόλαιο.
- Η προσυμφωνημένη τιμή στο προθεσμιακό συμβόλαιο για αυτή την μελλοντική αγοραπωλησία ονομάζεται **τιμή παράδοσης (delivery price)**.
- Η προσυμφωνημένη χρονική στιγμή στο προθεσμιακό συμβόλαιο κατά την οποία θα λάβει χώρα αυτή η μελλοντική αγοραπωλησία ονομάζεται **χρόνος ωρίμανσης (time of maturity)** ή **χρόνος λήξης (time of expiry)** ή **χρόνος παράδοσης (time of delivery)** του συμβολαίου.
- Μια βασική μεταβλητή που επηρεάζει την **αξία** του συμβολαίου είναι η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου στο οποίο αναφέρεται το συμβόλαιο.
 - Κατά τη στιγμή της συμφωνίας η τιμή παράδοσης του προθεσμιακού συμβολαίου συνήθως επιλέγεται έτσι ώστε το συμβόλαιο να έχει μηδενική αξία τόσο για τον αγοραστή όσο και για τον πωλητή του συμβολαίου. Μετά από τη στιγμή της συμφωνίας η αξία του συμβολαίου αρχίζει και μεταβάλλεται (οπότε γίνεται θετική για τον ένα αντισυμβαλλόμενο και αρνητική για τον άλλο).
- Τη στιγμή t , η **προθεσμιακή τιμή (forward price)** $F_{t,T}$ του συμβολαίου (που ωριμάζει την T), ορίζεται ως εκείνη η τιμή παράδοσης που θα έκανε το συμβόλαιο να έχει μηδενική αξία τη στιγμή t .

Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) (Futures)

- Διαπραγμάτευση σε οργανωμένα χρηματιστήρια
- Τυποποίηση συμβολαίου
 - Ποσότητα
 - Χρόνος παράδοσης
 - Ποιότητα αγαθού
 - Τόπος παράδοσης
- Εγγύηση και εξασφάλιση
 - Χωρίς κίνδυνο αντισυμβαλλόμενου (αθέτησης)
 - ο αντισυμβαλλόμενος είναι το χρηματιστήριο
 - Περιθώριο ασφάλισης
 - ο τρόπος που καλύπτεται το χρηματιστήριο από τον κίνδυνο αθέτησης
 - Ημερήσια αποτίμηση θέσεων και ανάλογη πίστωση/χρέωση του λογαριασμού με το αντίστοιχο κέρδος/ζημιά
- Δυνατότητα εύκολης αναίρεσης της υποχρέωσης
 - κλείσιμο θέσεων

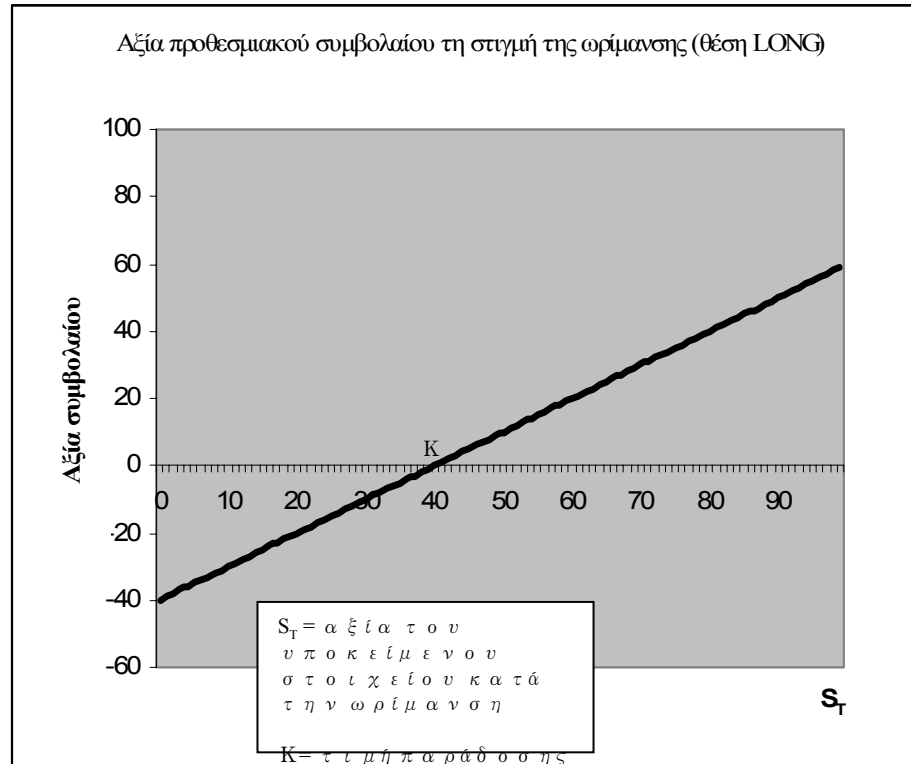
Προθεσμιακά Συμβόλαια (Forwards)

- Εξωχρηματιστηριακά προϊόντα [over the counter (OTC)]
- Μη τυποποιημένα συμβόλαια
 - Φτιαγμένα στα μέτρα και τις προτιμήσεις των αντισυμβαλλόμενων
- Κίνδυνος αντισυμβαλλόμενου (αθέτησης)
- Δυσκολία αναίρεσης της υποχρέωσης
 - λόγω των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών του συμβολαίου

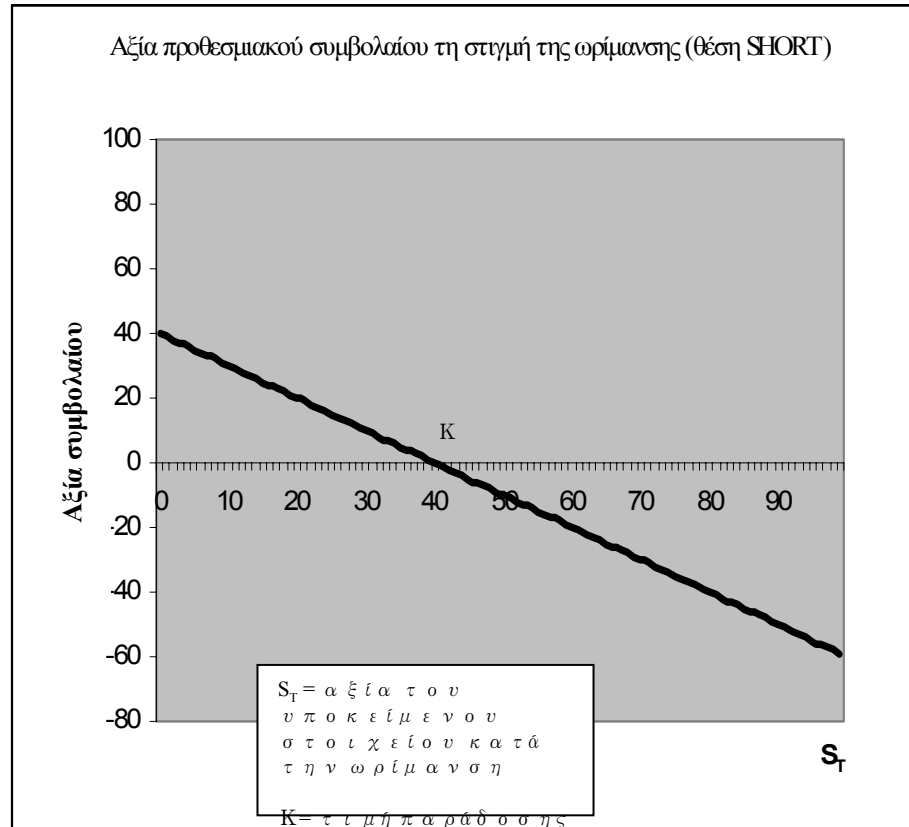
Αξία Προθεσμιακού Συμβολαίου στη λήξη

- Εάν
 - K η τιμή παράδοσης ενός forward
 - T η ημερομηνία ωρίμανσης του συμβολαίου
 - S_T η τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή T
- Τότε
 - Αξία Θέσης Long την T : $S_T - K$
 - Αξία Θέσης Short την T : $K - S_T$
- *Παρατήρηση: Οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν μόνο για την ημερομηνία λήξης T*

Αξία Long Forward στη λήξη



Αξία Short Forward στη λήξη



Παράδειγμα

- ο A συμφωνεί να πουλήσει στον B (και ο B συμφωνεί να αγοράσει από τον A) 100.000 λίτρα πετρελαίου σε 1 έτος από σήμερα προς 0,68\$ το λίτρο. Ας υποθέσουμε ότι η σημερινή τιμή του ενός λίτρου πετρελαίου είναι 0,65\$. Η τιμή 0,68\$ ανά λίτρο είναι η τιμή παράδοσης του πετρελαίου σε ένα έτος από σήμερα. Δηλαδή σε ένα έτος από σήμερα ο αγοραστής θα πληρώσει 68.000\$ στον πωλητή και θα παραλάβει 100.000 λίτρα πετρέλαιο. Εάν σε ένα έτος από σήμερα η τιμή του πετρελαίου έχει ανέβει στο 1\$ ανά λίτρο, ο αγοραστής θα είναι κερδισμένος (και ο πωλητής ζημιωμένος) κατά 32.000\$. Αντίθετα εάν σε ένα έτος από σήμερα η τιμή του πετρελαίου είναι 0,50\$ ανά λίτρο τότε ο αγοραστής θα είναι ζημιωμένος (και ο πωλητής κερδισμένος) κατά 18.000\$.
- Ας υποθέσουμε τώρα ότι την επόμενη ημέρα της συμφωνίας η τιμή του πετρελαίου ανέβηκε από τα 0,65\$ ανά λίτρο στο 1\$ ανά λίτρο. Εάν οι δύο αντισυμβαλλόμενοι είχαν κάνει τη συμφωνία τους την επόμενη μέρα τότε δεν θα είχαν συμφωνήσει σε τιμή παράδοσης 0,68\$ αλλά σε μια άλλη τιμή, ας πούμε 1,05\$ ανά λίτρο. Τώρα το προθεσμιακό συμβόλαιο της προηγούμενης ημέρας έχει ήδη θετική αξία για τον αγοραστή και αρνητική αξία για τον πωλητή.
- Δηλαδή την επόμενη ημέρα η προθεσμιακή τιμή του συμβολαίου είναι 1,05\$ ανά λίτρο. Δηλαδή τα προθεσμιακά συμβόλαια που συμφωνούνται αυτή την ημέρα έχουν τιμή παράδοσης 1,05\$ ανά λίτρο. Ο A που αγόρασε το συμβόλαιο την προηγούμενη ημέρα είναι σαφώς κερδισμένος αυτή τη συγκεκριμένη ημέρα (γιατί?) (για αργότερα δεν ξέρουμε τι θα συμβεί).

Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

- Τα δικαιώματα προαίρεσης είναι συμβόλαια μεταξύ δύο αντισυμβαλλόμενων, του αγοραστή του δικαιώματος και του πωλητή του δικαιώματος
- Ο αγοραστής του δικαιώματος έχει τη δυνατότητα να εξασκήσει το δικαίωμα και να απαιτήσει την εκτέλεση της συναλλαγής που περιγράφεται από τους όρους του συμβολαίου. Ο αγοραστής του δικαιώματος δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμα του εφόσον δεν τον συμφέρει
- Ο πωλητής του δικαιώματος είναι υποχρεωμένος να ανταποκριθεί στην εκτέλεση της συναλλαγής που περιγράφεται από τους όρους του συμβολαίου εφόσον το δικαίωμα εξασκηθεί από τον αγοραστή.
- Ο αγοραστής του δικαιώματος καταβάλλει ένα τίμημα στον πωλητή του δικαιώματος προκειμένου να αποκτήσει το δικαίωμα. Το τίμημα αυτό ονομάζεται ασφάλιστρο ή πριμ (premium) του δικαιώματος.
- Το κέρδος του ενός αντισυμβαλλόμενου είναι η ζημιά του άλλου.

Όροι συμβολαίου

- Οι όροι του συμβολαίου αφορούν:
- Τον υποκείμενο τίτλο (ή αγαθό)
- Το πλήθος των τίτλων (ή την ποσότητα και ποιότητα του αγαθού) που θα αλλάξει χέρια εάν εξασκηθεί το συμβόλαιο
- Την τιμή εξάσκησης, δηλαδή την προσυμφωνημένη τιμή μονάδας του τίτλου (ή του αγαθού) βάσει της οποίας θα γίνει η συναλλαγή
- Την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου
- Τον τύπο του δικαιώματος.
 - Αμερικάνικου τύπου: εξάσκηση οποιαδήποτε στιγμή έως τη λήξη του δικαιώματος
 - Ευρωπαϊκού τύπου: εξάσκηση μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος

Αγορές Δικαιωμάτων

- ΟTC αγορά δικαιωμάτων
 - Ο αγοραστής του δικαιώματος αντιμετωπίζει κίνδυνο αντισυμβαλλόμενου
 - Οι αντισυμβαλλόμενοι ενδέχεται να δυσκολευθούν να αποδεσμευθούν από τις θέσεις τους
- Οργανωμένα χρηματιστήρια δικαιωμάτων
 - Ο αγοραστής του δικαιώματος δεν αντιμετωπίζει (ουσιαστικό) κίνδυνο αντισυμβαλλομένου αφού ο αντισυμβαλλόμενος είναι το χρηματιστήριο παραγωγών
 - Ο αγοραστής ή ο πωλητής ενός δικαιώματος μπορεί να αποδεσμευθεί εύκολα από τη θέση του πραγματοποιώντας την αντίθετη συναλλαγή (δηλ. ο αγοραστής θα πουλήσει τα δικαιώματα στο χρηματιστήριο και ο πωλητής θα αγοράσει τα δικαιώματα από το χρηματιστήριο)

Η Ελληνική Αγορά Δικαιωμάτων (Call και Put)

- Δικαιώματα επί δεικτών
 - Υποκείμενα στοιχεία: χρηματιστηριακοί δείκτες
 - *FTSE/ASE 20, FTSE/ASE 40*
 - Τύπος: *Ευρωπαϊκός*
 - Εκκαθάριση: *Ρευστά διαθέσιμα*
 - Τιμές αγοράς πώλησης (bid-ask): *σε μονάδες δείκτη*
 - Πολλαπλασιαστής: *5 ευρώ*
- Δικαιώματα επί μετοχών
 - Υποκείμενα στοιχεία: *μετοχές*
 - *Εθνική Τράπεζα, ΟΤΕ, Alpha Bank, Intracom*
 - Τύπος: *Αμερικάνικος*
 - Εκκαθάριση: *φυσική παράδοση*
 - Πολλαπλασιαστής: *100 μετοχές*
- Ημέρα λήξης
 - *Τρίτη Παρασκευή του μήνα λήξης*
- Περιθώρια ασφάλισης
 - Ο αγοραστής του δικαιώματος καταβάλλει το premium και δεν χρειάζεται περαιτέρω περιθώριο ασφάλισης αφού δεν ενέχει υποχρεώσεις
 - Ο πωλητής του δικαιώματος όμως υπόκειται στο μηχανισμό περιθωρίου ασφάλισης αφού ενέχει ενδεχόμενες υποχρεώσεις

Οι πέντε βασικοί παράγοντες στην αποτίμηση των δικαιωμάτων

- S_t = *τρέχουσα τιμή (τη χρ. Στιγμή t) μιας μονάδας του υποκείμενου στοιχείου*
- K = *τιμή εξάσκησης*
- T = *χρονική στιγμή λήξης του συμβολαίου.*
» Ο χρόνος που απομένει από τη χρονική στιγμή t έως τη λήξη του συμβολαίου είναι $T-t$
- r_f = *το ετήσιο επιτόκιο ενός ακίνδυνου αξιόγραφου*
- σ = *η μεταβλητότητα (τυπική απόκλιση) των αποδόσεων των τιμών του υποκείμενου στοιχείου*

Ορισμοί

- **Δικαίωμα προαίρεσης αγοράς (*call option*)**
 - Ένα ***call option (Ευρωπαϊκού τύπου)*** επί ενός υποκείμενου στοιχείου A , με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T , παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο A στην τιμή K ***τη*** χρονική στιγμή T .
 - Ένα ***call option (Αμερικάνικου τύπου)*** επί ενός υποκείμενου στοιχείου A , με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T , παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο στοιχείο A στην τιμή K ***μέχρι τη*** χρονική στιγμή T .

- **Δικαίωμα προαίρεσης πώλησης (*put option*)**
- Ένα *put option* (Ευρωπαϊκού τύπου) επί ενός υποκείμενου στοιχείου A , με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T , παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο στοιχείο A στην τιμή K τη χρονική στιγμή T .
 - Ένα *put option* (Αμερικάνικου τύπου) επί ενός υποκείμενου στοιχείου A , με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T , παρέχει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο στοιχείο A στην τιμή K μέχρι τη χρονική στιγμή T .

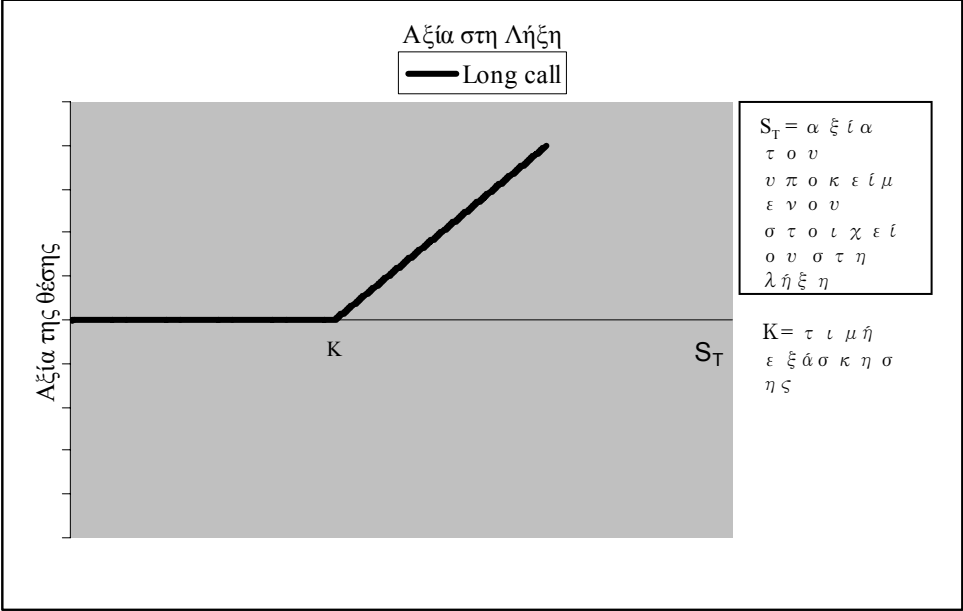
- Ένα option έχει δύο αντισυμβαλλόμενους, τον αγοραστή και τον πωλητή.
- Ο αγοραστής του δικαιώματος πληρώνει ένα ποσό (*premium*, ασφάλιστρο) στον πωλητή του δικαιώματος και αποκτά τη δυνατότητα να εξασκήσει το δικαίωμα (χωρίς όμως να είναι υποχρεωμένος) κατά το χρόνο εξάσκησης.
- Ο αγοραστής του δικαιώματος λέμε ότι έχει μια θέση *long* στο δικαίωμα.
- Ο πωλητής του δικαιώματος εισπράττει το *premium* προκαταβολικά και αναλαμβάνει την υποχρέωση να ικανοποιήσει τον αγοραστή σύμφωνα με τους όρους του δικαιώματος όταν και εφόσον ο αγοραστής αποφασίσει να εξασκήσει το δικαίωμα.
- Ο πωλητής του δικαιώματος λέμε ότι έχει μια θέση *short* στο δικαίωμα.

- Άρα παρατηρούμε *τέσσερις δυνατές θέσεις* στα βασικά είδη δικαιωμάτων:
- long call
- short call
- long put
- short put
- *Από εδώ και στο εξής όταν λέμε option (ή δικαίωμα) θα εννοείται ότι αναφερόμαστε σε option Ευρωπαϊκού τύπου, εκτός εάν ρητά αναφέρεται το αντίθετο.*

Αξία των δικαιωμάτων στη λήξη

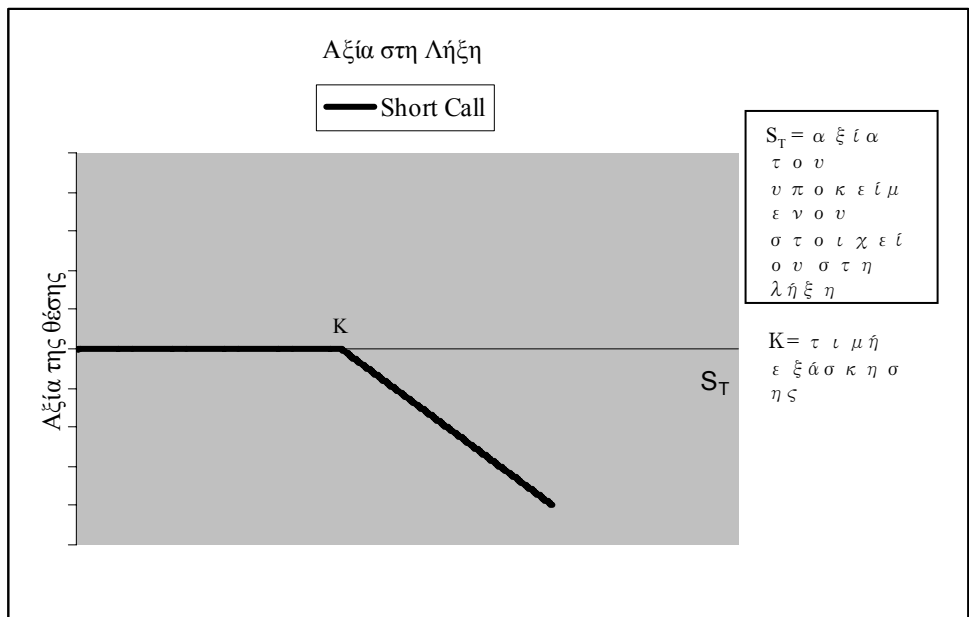
- Έστω K η τιμή εξάσκησης ενός option και T η ημερομηνία λήξης.
Έστω επίσης S_T η τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή T .
Η εσωτερική αξία τη στιγμή T της λήξης είναι
- $\max(S_T - K, 0)$ [Call]
- $\max(K - S_T, 0)$ [Put]

- Επομένως η αξία κάθε μιας από τις τέσσερις δυνατές θέσεις σε δικαιώματα κατά την ημερομηνία λήξης δίνεται ως εξής:
- Long call: $\max(S_T - K, 0)$
- Short call: $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$
- Long put: $\max(K - S_T, 0)$
- Short put: $-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$



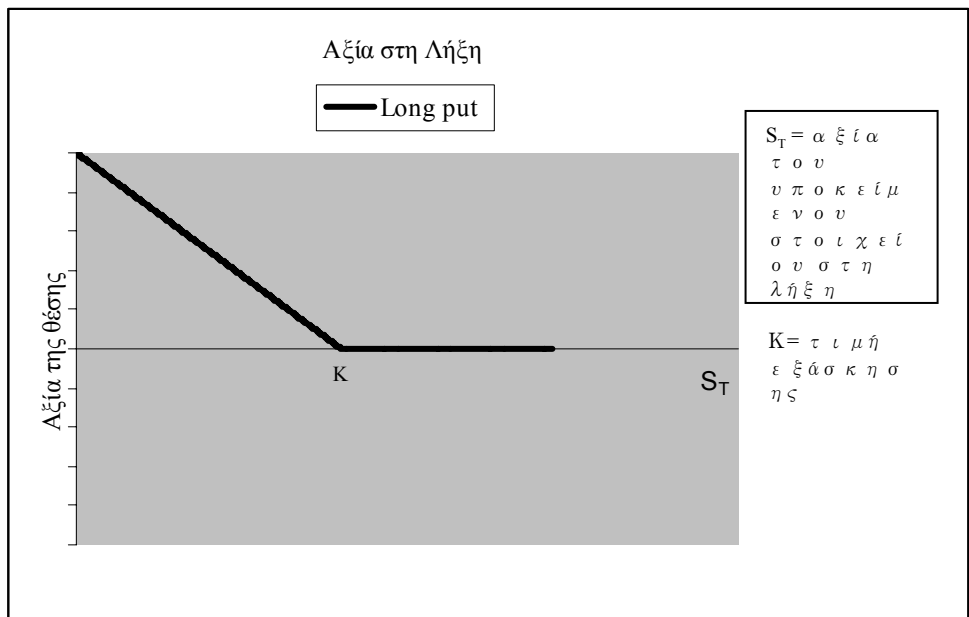
Αξία στη Λήξη

— Short Call



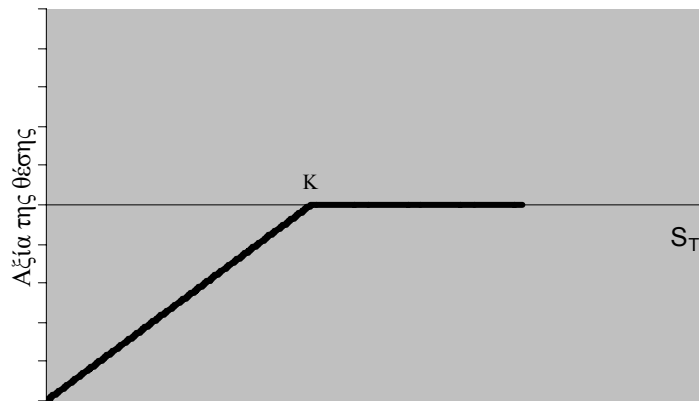
Αξία στη Λήξη

— Long put



Αξία στη Λήξη

— Short put



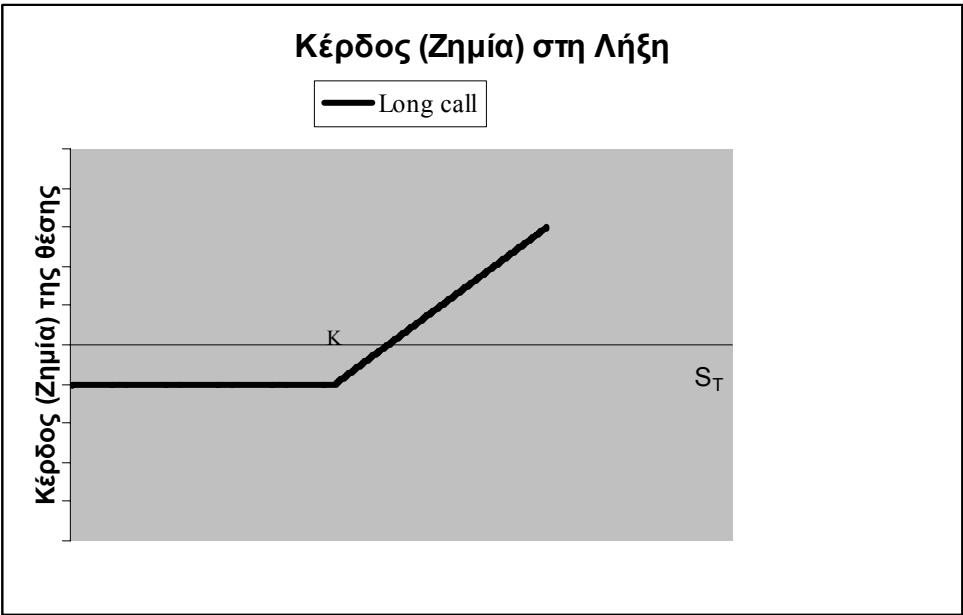
$S_T =$ αξία του υποκείμενου στοιχείου στο στήλη λήξη

$K =$ τιμή εξάσκησης

- **Κέρδος (ζημία) των δικαιωμάτων στη λήξη**
- Ένας επενδυτής που αγοράζει ένα δικαίωμα πληρώνει ένα **premium** στον πωλητή του δικαιώματος (έστω p). Τότε το κέρδος ή η ζημία στη λήξη του δικαιώματος ανάλογα με τη θέση που έχει ο αντισυμβαλλόμενος δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις και απεικονίζεται στα διαγράμματα που ακολουθούν.
- Long call: $\max (S_T - K, 0) - p$
- Short call: $p - \max (S_T - K, 0) = p + \min (K - S_T, 0)$
- Long put: $\max (K - S_T, 0) - p$
- Short put: $p - \max (K - S_T, 0) = p + \min (S_T - K, 0)$

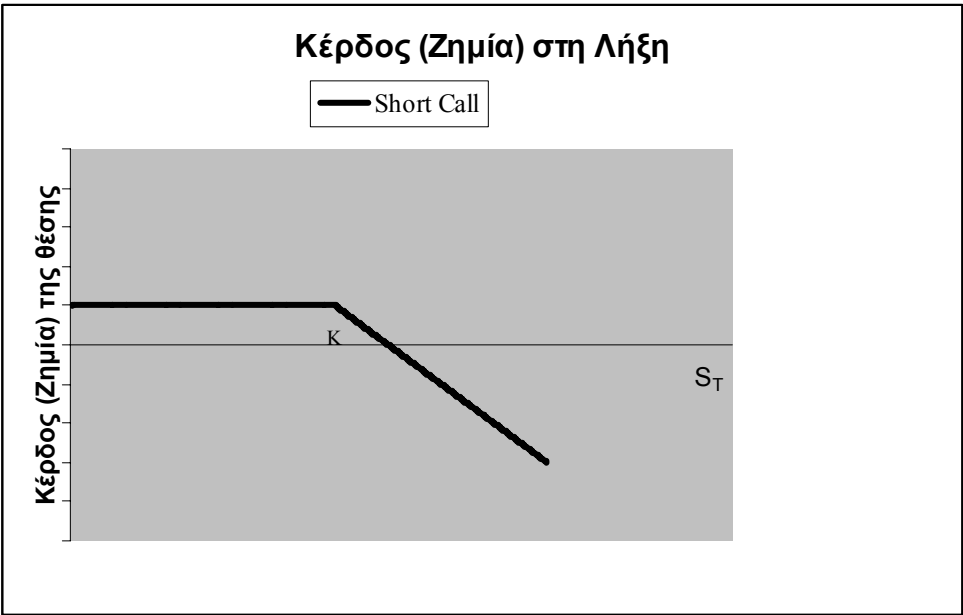
Κέρδος (Ζημία) στη Λήξη

— Long call



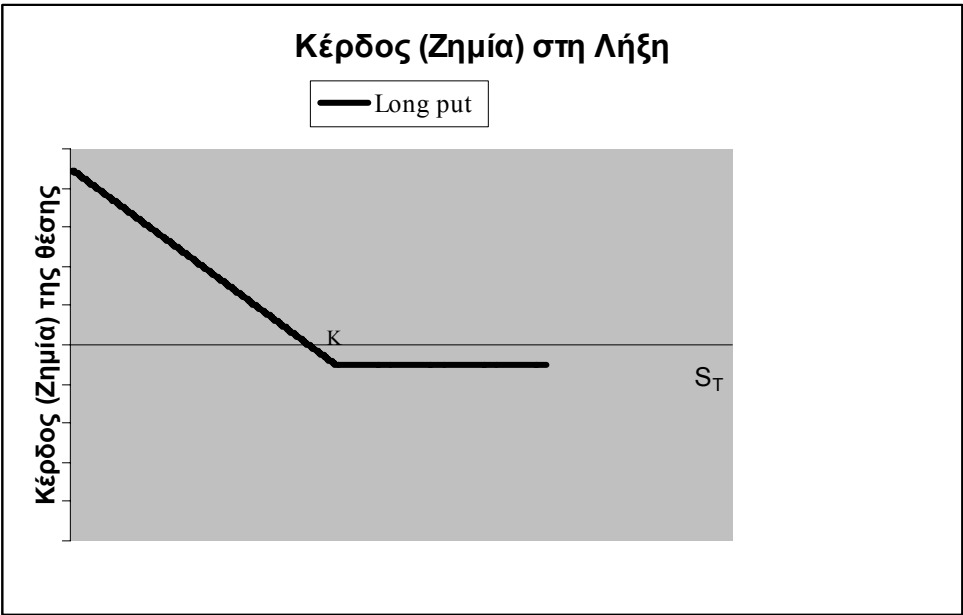
Κέρδος (Ζημία) στη Λήξη

— Short Call



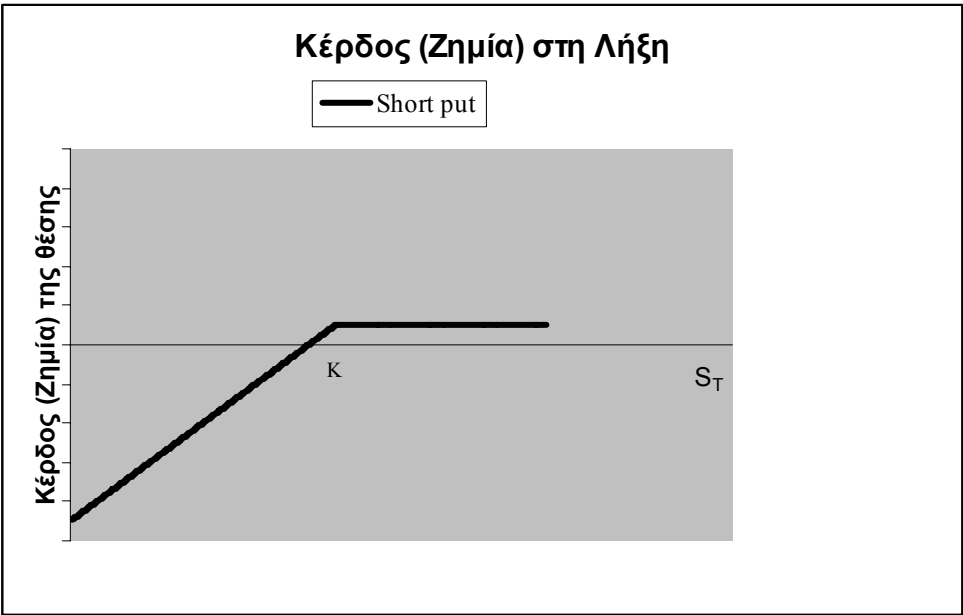
Κέρδος (Ζημία) στη Λήξη

— Long put



Κέρδος (Ζημία) στη Λήξη

— Short put



Επίδραση 5 παραγόντων στην αξία του δικαιώματος *πριν* τη λήξη

Παράγοντας	Μεταβολή	Call	Put
K	+	-	+
S_t	+	+	-
$T-t$	+	+	+
σ	+	+	+
r_f	+	+	-

Εσωτερική και Χρονική αξία του δικαιώματος πριν τη λήξη

- Η Εσωτερική Αξία ενός δικαιώματος τη χρονική στιγμή t είναι:
- $\max [S_T - K * e^{-r_f * (T-t)}, 0]$ [Call]
- $\max [K * e^{-r_f * (T-t)} - S_T, 0]$ [Put]
- Η χρονική αξία του δικαιώματος αντανακλά τις προσδοκίες των επενδυτών για επωφελή μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου έως τη λήξη. Καθώς ο χρόνος έως τη λήξη μειώνεται η χρονική αξία του δικαιώματος μειώνεται και η αξία του δικαιώματος τείνει προς την εσωτερική του αξία.
- Χρονική αξία = αξία δικαιώματος – εσωτερική αξία

In-, At- και Out of the money

- In the money options: Όταν το δικαίωμα έχει θετική εσωτερική αξία τότε χαρακτηρίζεται ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης πάνω από το χρηματικό του ισοδύναμο (in the money)
- At the money options: Όταν το δικαίωμα έχει μηδενική εσωτερική αξία και θα ήταν αδιάφορο να εξασκηθεί με την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου στοιχείου τότε χαρακτηρίζεται ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο χρηματικό του ισοδύναμο (at the money)
- Out of the money options: Όταν το δικαίωμα έχει μηδενική εσωτερική αξία και θα ήταν ασύμφορο να εξασκηθεί με την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου στοιχείου τότε χαρακτηρίζεται ως αντικείμενο διαπραγμάτευσης κάτω από το χρηματικό του ισοδύναμο (out of the money)

Ο Νόμος της Μιας Τιμής και η
έννοια της ακίνδυνης
εξισορροπητικής κερδοσκοπίας
(Arbitrage)

Ο νόμος της μιάς τιμής

- Θεωρείστε δύο επενδύσεις που σήμερα κοστίζουν C_1 και C_2 αντίστοιχα. Εάν η (παρούσα) αξία των μελλοντικών χρηματοροών της πρώτης επένδυσης ισούται πάντα με την (παρούσα) αξία των μελλοντικών χρηματοροών της δεύτερης επένδυσης τότε προκειμένου να μην υπάρχει ευκαιρία για arbitrage θα πρέπει να ισχύει $C_1=C_2$.
- (Ειδικά στην περίπτωση που κάποια επένδυση έχει βέβαιες μελλοντικές χρηματοροές, τότε, για να μην υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage, θα πρέπει το σημερινό της κόστος να ισούται με την παρούσα αξία αυτών των μελλοντικών χρηματοροών)

Ακίνδυνη εξισορροπητική κερδοσκοπία (Arbitrage)

- Αναφέρεται στην επίτευξη κέρδους χωρίς την ανάληψη κινδύνου μέσω κάποιας στρατηγικής trading
- Εάν οι τιμές σε κάποιες αγορές επιτρέπουν την υλοποίηση κάποιας στρατηγικής arbitrage τότε οι arbitrageurs θα υιοθετήσουν άμεσα αυτή τη στρατηγική, διεξάγοντας τις σχετικές αγοραπωλησίες, μέχρις ότου οι τιμές να μεταβληθούν τόσο που να μην επιτρέπουν πλέον τη διεξαγωγή του arbitrage.
- Η τιμολόγηση των παραγώγων γίνεται στη βάση της απουσίας arbitrage

Τιμολόγηση ΣΜΕ

- Στις επόμενες προτάσεις που αφορούν προθεσμιακά συμβόλαια (forwards) θεωρούμε τον παρακάτω συμβολισμό:
- T : χρονική στιγμή ωρίμανσης (λήξης) του Forward συμβολαίου (σε έτη)
- t : τρέχουσα χρονική στιγμή (σε έτη)
- S : τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή t
- S_T : τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή T (άγνωστη κατά τη στιγμή t)
- K : τιμή παράδοσης του Forward συμβολαίου
- f : αξία μιας long θέσης σε Forward συμβόλαιο κατά τη στιγμή t
- F : η Forward τιμή κατά τη χρονική στιγμή t
- r : ετήσιο επιτόκιο συνεχώς ανατοκιζόμενο, όπως ισχύει τη στιγμή t για μια επένδυση που ωριμάζει τη στιγμή T .

*Forward τιμή ενός Forward συμβολαίου επί
αξιόγραφου που δεν παρέχει έσοδο*

- Για να μην υπάρχει δυνατότητα arbitrage πρέπει να ισχύει η σχέση

$$F = S e^{r(T-t)}$$

- Εάν το επιτόκιο r είναι περιοδικά ανατοκιζόμενο και έχουμε n περιόδους ανά έτος και $(T-t) \cdot n$ περιόδους έως τη λήξη τότε η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί

$$F = S \cdot \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{(T-t) \cdot n}$$

Έστω $F > Se^{r(T-t)}$.

Τότε, τη χρονική στιγμή t ένας επενδυτής δανείζεται το ποσό S για χρονικό διάστημα $T-t$, αγοράζει το αξιόγραφο στην τιμή S και πουλάει το forward συμβόλαιο (δηλ. λαμβάνει μια short θέση στο forward).

Τη χρονική στιγμή T , πουλάει το αξιόγραφο βάσει των όρων του forward συμβολαίου στην τιμή F και από αυτά χρησιμοποιεί $Se^{r(T-t)}$ για να αποπληρώσει το δανεισμό του. Έτσι, τη χρονική στιγμή T , πραγματοποιεί ένα ακίνδυνο κέρδος $F - Se^{r(T-t)} > 0$. Δηλαδή, έχει κάνει arbitrage.

Αντίθετα, έστω $F < Se^{r(T-t)}$.

Τότε, τη χρονική στιγμή t ένας επενδυτής πουλάει short το υποκείμενο αξιόγραφο (δηλ. το δανείζεται και το πουλάει) εισπράττοντας το ποσό S το οποίο επενδύει με επιτόκιο r για διάστημα $T-t$. Ταυτόχρονα αγοράζει το forward συμβόλαιο (δηλ. λαμβάνει μια long θέση στο forward).

Τη χρονική στιγμή T , εισπράττει $Se^{r(T-t)}$ από την επένδυση του, αγοράζει το αξιόγραφο βάσει των όρων του forward στην τιμή F και κλείνει τη short θέση στο αξιόγραφο (επιστρέφοντας το σε αυτόν από τον οποίο το είχε δανεισθεί).

Έτσι τη χρονική στιγμή T , πραγματοποιεί ένα ακίνδυνο κέρδος $Se^{r(T-t)} - F > 0$. Δηλαδή, έχει κάνει arbitrage.

Άρα, η μοναδική τιμή που δεν επιτρέπει arbitrage είναι $F = Se^{r(T-t)}$

Το κόστος διαχρονικής διατήρησης (cost of carry)

- Στην προηγούμενη επιχειρηματολογία σχετικά με τον τρόπο υλοποίησης arbitrage δε λάβαμε το κόστος διατήρησης της θέσης στο υποκείμενο στοιχείο κατά τη διάρκεια ζωής του ΣΜΕ. Ειδικά στην περίπτωση των εμπορευμάτων αυτό το κόστος ενδέχεται να είναι αρκετά αυξημένο και ως εκ τούτου πρέπει να ληφθεί υπόψη.
 - Κόστος χρηματοδότησης
 - Κόστος αποθήκευσης
 - Κόστος ασφάλισης
 - Κόστος μεταφοράς
- Έτσι, ο προηγούμενος τύπος για την τιμολόγηση ΣΜΕ παραμένει ο ίδιος, όμως το r υποδηλώνει τώρα ολόκληρο το κόστος διαχρονικής διατήρησης της θέσης (ως ποσοστό επί της αξίας της θέσης)
- Στους χρηματοοικονομικούς τίτλους για παράδειγμα το μόνο βασικό κόστος είναι το κόστος χρηματοδότησης

Τιμολόγηση Δικαιωμάτων προαίρεσης

- Στις επόμενες προτάσεις που αφορούν Δικαιώματα Προαίρεσης (options) θεωρούμε τον παρακάτω συμβολισμό:
- T : χρονική στιγμή εκπνοής (λήξης) του δικαιώματος (σε έτη)
- t : τρέχουσα χρονική στιγμή (σε έτη)
- S : τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή t
- S_T : τιμή του υποκείμενου στοιχείου τη στιγμή T (άγνωστη κατά τη στιγμή t)
- K : τιμή εξάσκησης (strike)
- C : αξία ενός call option κατά τη στιγμή t [ενδέχεται να χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $C(S_t, K, T-t)$ εάν υπάρχει λόγος να δώσουμε έμφαση στο υποκείμενο στοιχείο, στην τιμή εξάσκησης και στο χρόνο έως τη λήξη]
- P : αξία ενός put option κατά τη στιγμή t [παρόμοια ενδέχεται να χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $P(S_t, K, T-t)$ εάν υπάρχει λόγος έμφασης]
- r : ετήσιο επιτόκιο συνεχώς ανατοκίζόμενο, όπως ισχύει τη στιγμή t για μια επένδυση που ωριμάζει τη στιγμή T .
- σ : η μεταβλητότητα της απόδοσης της τιμής του υποκείμενου στοιχείου

Black & Scholes

$$C = S \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot (T-t)} \cdot N(d_2)$$

και

$$P = C - S + K \cdot e^{-r \cdot (T-t)}$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S / K) + [r + (1/2) \cdot \sigma^2] \cdot [T - t]}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S / K) + [r - (1/2) \cdot \sigma^2] \cdot [T - t]}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}$$

και

$N(\cdot)$ παριστάνει τη σωρευτική κανονική κατανομή

Δέλτα (Δ) και Γάμμα (Γ)

- Όπως έχουμε δει η αξία (τιμή) ενός δικαιώματος εξαρτάται από την εκάστοτε τιμή του υποκείμενου τίτλου, δηλαδή η αξία του δικαιώματος είναι μια συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Το Δ του δικαιώματος είναι η πρώτη παράγωγος της αξίας του δικαιώματος ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου.
- *Εκφράζει την ευαισθησία της αξίας του δικαιώματος σε μικρές μεταβολές της τιμής του υποκείμενου τίτλου*
- *Συγκεκριμένα, εάν η τιμή του υποκείμενου τίτλου μεταβληθεί κατά ένα ευρώ τότε η τιμή του δικαιώματος θα μεταβληθεί κατά Δ ευρώ.* (π.χ. έστω ότι σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή το Δ ενός put option ισούται με $(-0,5)$. Αυτό σημαίνει ότι αν εκείνη τη στιγμή η τιμή του υποκείμενου τίτλου αυξηθεί κατά 1 ευρώ τότε η τιμή του put θα μεταβληθεί κατά $(-0,5)$ ευρώ δηλαδή θα μειωθεί κατά περίπου 0,5 ευρώ. Αντίθετα, αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου μειωθεί κατά 1 ευρώ τότε η τιμή του put θα αυξηθεί κατά 0,5 ευρώ).
- *Το Δ ενός δικαιώματος δεν είναι σταθερό, εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου τίτλου (δηλαδή είναι συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου).*
- *Στιγμασία, το να είμαστε κάτοχοι ένα δικαιώματος επί μιάς μονάδας ενός υποκείμενου τίτλου, είναι ισοδύναμο με το να έχουμε μια θέση Δ μονάδων του υποκείμενου τίτλου στη spot αγορά.*
- *Η ευαισθησία του Δ ως προς μεταβολές της τιμής του υποκείμενου τίτλου ονομάζεται Γ . Συγκεκριμένα δείχνει πόσο περίπου θα μεταβληθεί το Δ εάν η τιμή του υποκείμενου τίτλου μεταβληθεί κατά ένα ευρώ*
- Το Γ του δικαιώματος είναι η πρώτη παράγωγος του Δ ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου (ισοδύναμα η δεύτερη παράγωγος της αξίας του δικαιώματος ως προς την τιμή του υποκείμενου τίτλου)

Δ και Γ για call options

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) > 0$$

$$\Gamma_C = \frac{\partial \Delta_C}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} > 0$$

$$0 \leq \Delta_C \leq 1$$

$$\Gamma_C > 0$$

Out of the money call: $\Delta_C \approx 0$

At the money call: $\Delta_C \approx 0,5$

In the money call: $\Delta_C \approx 1$

Δ και Γ για put options

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = -N(-d_1) < 0$$

$$\Gamma_P = \frac{\partial \Delta_P}{\partial S} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{e^{-d_1^2/2}}{S \cdot \sigma \cdot \sqrt{T-t} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} > 0$$

$$-1 \leq \Delta_P \leq 0$$

$$\Gamma_P > 0$$

Out of the money put: $\Delta_p \approx 0$

At the money put: $\Delta_p \approx -0,5$

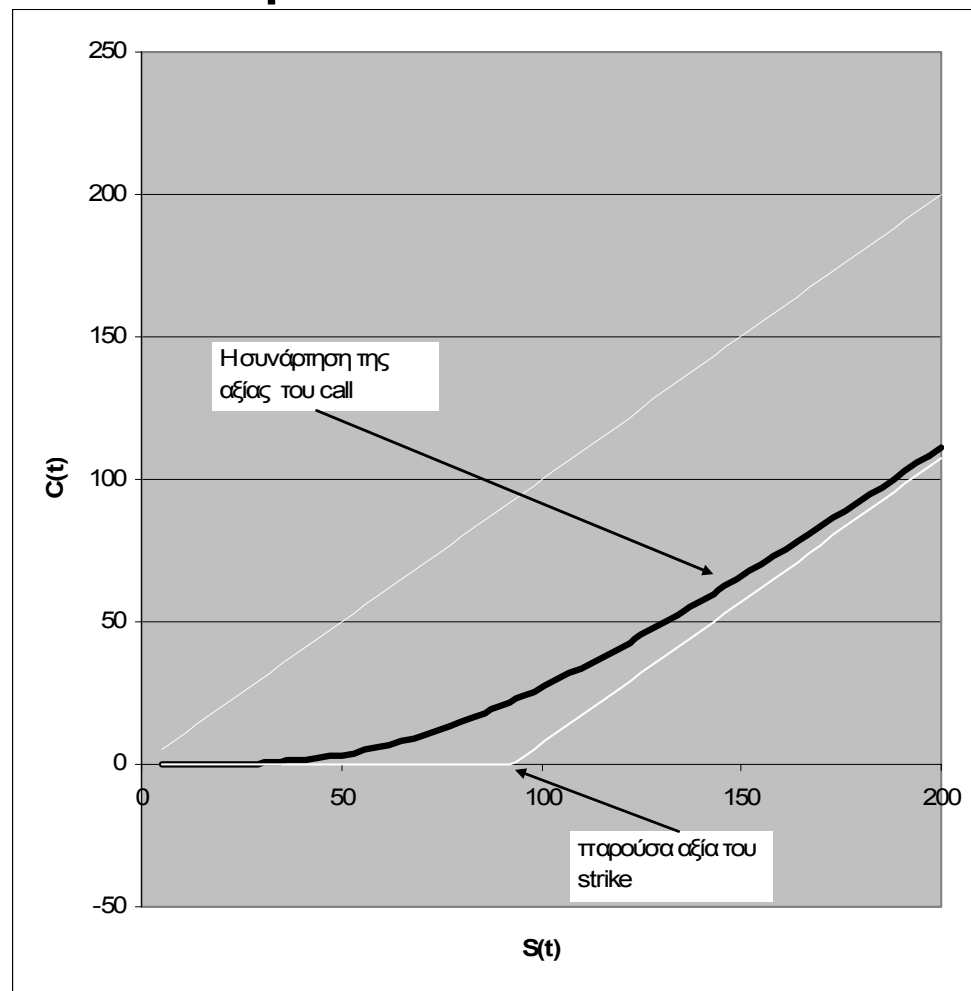
In the money put: $\Delta_p \approx -1$

Δ και Γ

- Στα επόμενα δύο διαγράμματα θα δούμε την τιμή ενός call και την τιμή ενός put ως συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου, όταν η τιμή εξάσκησης είναι 100, ο χρόνος έως τη λήξη είναι 1,5 έτος, η μεταβλητότητα της απόδοσης του υποκείμενου τίτλου είναι 50% ετησίως και τα επιτόκια είναι στο 5%
- Διαλέξτε τώρα ένα σημείο επάνω στην καμπύλη που περιγράφει την αξία του δικαιώματος και σχεδιάστε την εφαπτομένη της καμπύλης. Η κλίση αυτής της εφαπτομένης είναι το Δ του δικαιώματος (για την αντίστοιχη τιμή του υποκείμενου τίτλου). Σχεδιάστε μια άλλη εφαπτομένη σε ένα γειτονικό σημείο της καμπύλης. Προσέξτε ότι η κλίση της νέας εφαπτομένης άλλαξε. Το πόσο «γρήγορα» άλλαξε μας το λέει το Γ .

Η αξία του call πριν τη λήξη ως συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου

- Call option
- Τιμή εξάσκησης = 100
- Χρόνος έως τη λήξη=1,5 έτος
- $\sigma=50\%$
- $r=5\%$
- Η πλάγια λευκή γραμμή (που σχηματίζει γωνία με τον οριζόντιο άξονα κοντά στο 100), είναι η εσωτερική αξία του call και η απόσταση που περισσεύει μέχρι τη μαύρη γραμμή από πάνω είναι η χρονική αξία
- Προσέξτε για παράδειγμα ότι όταν το call είναι at the money ή out of the money, η αξία του call προέρχεται κυρίως από τη χρονική του αξία. Αντίθετα όσο πιο «βαθεία» in the money είναι το call τόσο περισσότερο «μετράει» η εσωτερική του αξία



Η αξία του put πριν τη λήξη ως συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου τίτλου

- Put option
- Τιμή εξάσκησης = 100
- Χρόνος έως τη λήξη=1,5 έτος
- $\sigma = 50\%$
- $r = 5\%$

