′Διαχείριση Κινδύνου - Risk Management′
2ο μέρος μαθήματος -ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2010

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

29 Ιουνίου 2010

Άσκηση 1 *Αν το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι* $\Omega = \{1, 2\}$ *τότε προσδιορίστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του* $\mathbb{R}^2$ *αναπαριστούν συνεπή σύνολα αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων με την ασθενή έννοια και ποια όχι. Σε κάθε περίπτωση αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

(i) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -4x\}$

(ii) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 0, y \leq -2x\}$

(iii) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -3x\}$ *Το ίδιο αν το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι* $\Omega = \{1, 2, 3\}$

για τα σύνολα

(iv) $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \geq -2x, z \geq 0\}$

(v) $\mathcal{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \geq 0, y \leq 2x + z, z + y \leq 0\}$

Λύση: Τα σύνολα που υποδεικνύονται στις περιπτώσεις (ii) και (v) δεν είναι σύνολα αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων διότι περιέχουν στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ με αρνητικές συντεταγμένες. Για παράδειγμα, $(-1, -2) \in \mathcal{A}$ στην περίπτωση (ii) και $(0, -1, -1) \in \mathcal{A}$ στην περίπτωση (v). Για την περίπτωση (i), έστω $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ στοιχεία του $\mathcal{A}$. Τότε ισχύοουν τα εξής: $x_2 + 2x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, $y_2 + 2y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$. Για το διάνυσμα $X + Y$ ισχύει ότι $(x_2 + y_2) + 2(x_1 + y_1) \geq 0, x_2 + y_2 \geq 0$ και επομένως $X + Y \in \mathcal{A}$. Για το διάνυσμα λX με $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $\lambda x_2 + 4(\lambda x_1) \geq 0$ και $\lambda x_2 \geq 0$. Άρα $\lambda X \in \mathcal{A}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Επίσης αν $X \in \mathbb{R}^2_+$ ισχύει ότι $x_2 + 2x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$, άρα $X \in \mathcal{A}$. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι για το $X = (x_1, x_2)$ ισχύει $x_1, x_2 < 0$ αυτό σημαίνει ότι $X \notin \mathcal{A}$ διότι αν το X ανήκε στο $\mathcal{A}$ θα ήταν $x_2 \geq 0$. Επομένως το $\mathcal{A}$ στο (i) είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων. Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση (iii) και (iv) όπου πάλι το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων.

Άσκηση 2 *Αν το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι* $\Omega = \{1, 2\}$ *και* $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -\frac{1}{2}x\}$, *να δείξετε ότι το σύνολο αυτό είναι συνεπές σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων με την ασθενή έννοια και προσδιορίστε το* $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(x)$ *αν* $x = (2, 3), x = (-4, 3)$. *Με* $\mathbf{1}$ *συμβολίζουμε τη χωρίς κίνδυνο απόδοση* $(1, 1)$.

Λύση: Με τον τρόπο που υποδεικνύεται στην προηγούμενη Άσκηση αποδεικνύεται ότι το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων.

Στην περίπτωση που $X = (2, 3)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m) + (2, 3) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m+2, m+3) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m+3+\frac{1}{2}(m+2) \geq 0, m+3 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m + 8 \geq 0, m + 3 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m + 8 \geq 0\} = -\frac{8}{3}.$$

Στην περίπτωση που $X = (-4, 3)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m,m)+(-4,3) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m-4, m+3) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m+3+\frac{1}{2}(m-4) \geq 0, m+3 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m+2 \geq 0, m+3 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m+2 \geq 0\} = -\frac{2}{3}.$$

Άσκηση 3 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1,2\}$. Έστω επενδυτής του οποίου η σχέση προτίμησης πάνω στο σύνολο των χρηματοοικονομικών θέσεων ορίζεται από την συνάρτηση ωφελιμότητας $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $u = -\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ όπου $\mathcal{A}$ το σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων της προηγούμενης άσκησης. Ποια από τις ακόλουθες επενδύσεις είναι προτιμότερη για αυτόν μεταξύ των $x_1 = (4,-3)$, $x_2 = (-3,4)$, $x_3 = (0,-4)$, $x_4 = (3,-5)$;*

Λύση:
Στην περίπτωση που $X = (4,-3)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m,m)+(4,-3) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m+4, m-3) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m-3+\frac{1}{2}(m+4) \geq 0, m-3 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m-2 \geq 0, m-3 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m-3 \geq 0\} = 3.$$

Στην περίπτωση που $X = (-3,4)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m,m)+(-3,4) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m-3, m+4) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m+4+\frac{1}{2}(m-3) \geq 0, m+4 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m-5 \geq 0, m+4 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m-2 \geq 0\} = \frac{5}{3}.$$

Στην περίπτωση που $X = (0,-4)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m,m)+(0,-4) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m+4) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m-4+\frac{1}{2}m \geq 0, m-4 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m-8 \geq 0, m-4 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m+4 \geq 0\} = 4.$$

Στην περίπτωση που $X = (3,-5)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m,m)+(3,-5) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m+3, m-5) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m-5+\frac{1}{2}(m+3) \geq 0, m-5 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 3m-7 \geq 0, m-5 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m-5 \geq 0\} = 5.$$

Επομένως η προτιμότερη επένδυση είναι η επιλογή του συμβολαίου με απόδοση X_2.

Άσκηση 4 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1,2,3\}$. Το σύνολο των σεναρίων για τις αντικειμενικές πιθανότητες των καταστάσεων του κόσμου είναι το υποσύνολο $\mathcal{P}$ του simplex του $\mathbb{R}^3_+$ που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα $p_1 = (1,0,0), p_2 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ και το μεμονωμένο σημείο $p_3 = (\frac{5}{6},\frac{1}{6},0)$. Αν $\rho_{\mathcal{P}}$ είναι το συνεπές μέτρο κινδύνου που ορίζεται στο $\mathbb{R}^3$ ως προς το $\mathcal{P}$, δηλαδή $\rho_{\mathcal{P}}(x) = \sup\{\pi(-x) | \pi \in \mathcal{P}\}$, να προσδιορίσετε το ασφάλιστρο των χρηματοοικονομικών θέσεων $x_1 = (-2,5,0), x_2 = (-1,1,-1)$ ως προς αυτό το μέτρο κινδύνου.*

Λύση: Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $p_1 = (1,0,0), p_2 = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}), p_3 = (\frac{5}{6},\frac{1}{6},0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Άρα το supremum στο $\rho_{\mathcal{P}}(X) = \sup\{\pi \cdot (-X) | \pi \in \mathcal{P}\} = \sup\{(-X) \cdot \pi | \pi \in \mathcal{P}\}$ είναι $\max\{\sup\{(-X) \cdot \pi | \pi \in \mathcal{P}_1\}, \pi_3(-x)\}$ όπου $\mathcal{P}_1$ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα p_1, p_2. maximum. Το μέγιστο λαμβάνεται σε κάποια από τις κορυφές του $\mathcal{P}_1$, αφού το $\mathcal{P}_1$ είναι πολύτοπο. Άρα δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε τα εσωτερικά γινόμενα $(-X_j) \cdot p_i, i = 1,2,\ j = 1,2$ για να διαπιστώσουμε ποιο δίνει τη μεγαλύτερη τιμή. Είναι $(-X_1) \cdot p_1 = 2, (-X_1) \cdot p_2 = -1, (-X_1) \cdot p_3 = \frac{5}{6}$. Επομένως $\rho_{\mathcal{P}}(X_1) = 2$. Ομοίως για το X_2 είναι $(-X_2) \cdot p_1 = 1, (-X_2) \cdot p_2 = \frac{1}{3}, (-X_2) \cdot p_3 = \frac{2}{3}$. Επομένως $\rho_{\mathcal{P}}(X_2) = 1$.

Άσκηση 5 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1, 2\}$. Να προσδιοριστεί το σύνολο των συναρτησιακών που αναπαριστούν το συνεπές μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ αν το σύνολο των αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων είναι το $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -\frac{1}{3}x\}$.*

Λύση: Με παρόμοιο τρόπο όπως και στην Άσκηση 1 μπορούμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων. Επομένως από γνωστή πρόταση το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι συνεπές μέτρο κινδύνου. Άρα υπάρχει σύνολο διανυσμάτων πιθανότητας για τις καταστάσεις του κόσμου $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ το οποίο είναι υποσύνολο του simplex Δ_1 του $\mathbb{R}^2_+$, τέτοιο ώστε $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(x) = \sup\{\pi(-x) | \pi \in \mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$. Από γνωστή πρόταση έχουμε όμως ότι $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}} = \Delta_1 \cap \mathcal{A}^\circ$, όπου $\mathcal{A}^\circ$ η δυϊκή σφήνα του $\mathcal{A}$. Για να προσδιορίσουμε το σύνολο $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$, πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε το $\mathcal{A}^\circ$. Έστω $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Αν $b < 0$ τότε $(a,b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $b = (a,b) \cdot (0,1)$ και $(0,1) \in \mathcal{A}$. Επίσης αν $a < 0$ τότε $(a,b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $a = (a,b) \cdot (1,0)$ και $(1,0) \in \mathcal{A}$. Ακόμη αν το διάνυσμα (a,b) είναι τέτοιο ώστε $3b - a < 0$, τότε $(a,b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $3b - a = (a,b) \cdot (-1,3)$ και $(-1,3) \in \mathcal{A}$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία $b \geq 0, a \geq 0, b \geq 3a$ ανήκουν στο $\mathcal{A}^\circ$. Τότε θα έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{A}^\circ$ είναι ακριβώς ο κώνος του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από αυτά τα διανύσματα. Έστω $(x,y) \in \mathcal{A}$ και $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ με $a \geq 0, b \geq 0, b \geq 3a$. Τότε $(a,b) \cdot (x,y) = ax + by \geq ax + 3ay = a(x + 3y) \geq 0$ διότι $a \geq 0$ και $y \geq -\frac{1}{3}x$. Άρα το $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ αποτελείται από τα διανύσματα (a,b) του Δ_1 για τα οποία ισχύει ότι $b \geq 3a$. Για να τα προσδιορίσουμε, βρίσκουμε το σημείο τομής των ευθειών $a + b = 1$ και $b = 3a$, το οποίο είναι το $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Επομένως το $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ δεν είναι παρά το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0,1), (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, δηλαδή $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}} = \{(p_1, p_2) \in \Delta_1 | (p_1, p_2) = \lambda(0,1) + (1-\lambda)(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \lambda \in [0,1]\}$.

Άσκηση 6 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1, 2\}$. Να προσδιοριστεί το σύνολο των συναρτησιακών που αναπαριστούν το συνεπές μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ αν το σύνολο των αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων είναι το $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -5x\}$.*

Λύση: Με παρόμοιο τρόπο όπως και στην Άσκηση 1 μπορούμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων. Επομένως από γνωστή πρόταση το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι συνεπές μέτρο κινδύνου. Άρα υπάρχει σύνολο διανυσμάτων πιθανότητας για τις καταστάσεις του κόσμου $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ το οποίο είναι υποσύνολο του simplex Δ_1 του $\mathbb{R}^2_+$, τέτοιο ώστε $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(x) = \sup\{\pi(-x) | \pi \in \mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$. Από γνωστή πρόταση έχουμε όμως ότι $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}} = \Delta_1 \cap \mathcal{A}^\circ$, όπου $\mathcal{A}^\circ$ η δυϊκή σφήνα του $\mathcal{A}$. Για να προσδιορίσουμε το σύνολο $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$, πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε το $\mathcal{A}^\circ$. Έστω $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Αν $b < 0$ τότε $(a,b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $b = (a,b) \cdot (0,1)$ και $(0,1) \in \mathcal{A}$. Επίσης αν $a < 0$ τότε $(a,b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $a = (a,b) \cdot (1,0)$ και $(1,0) \in \mathcal{A}$. Ακόμη αν το διάνυσμα (a,b) είναι τέτοιο ώστε $5b - a < 0$, τότε $(a,b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $5b - a = (a,b) \cdot (-1,5)$ και $(-1,5) \in \mathcal{A}$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία $b \geq 0, a \geq 0, b \geq \frac{a}{5}$ ανήκουν στο $\mathcal{A}^\circ$. Τότε θα έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{A}^\circ$ είναι ακριβώς ο κώνος του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από αυτά τα διανύσματα. Έστω $(x,y) \in \mathcal{A}$ και $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ με $a \geq 0, b \geq 0, b \geq \frac{a}{5}$. Τότε $(a,b) \cdot (x,y) = ax + by \geq ax + \frac{1}{5}ay = a(x + \frac{1}{5}y) \geq 0$ διότι $a \geq 0$ και $y \geq -5x$. Άρα το $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ αποτελείται από τα διανύσματα (a,b) του Δ_1 για τα οποία ισχύει ότι $b \geq \frac{1}{5}a$. Για να τα προσδιορίσουμε, βρίσκουμε το σημείο τομής των ευθειών $a + b = 1$ και $b = \frac{1}{5}a$, το οποίο είναι το $(\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$. Επομένως το $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ δεν είναι παρά το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0,1), (\frac{5}{6}, \frac{1}{6})$, δηλαδή $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}} = \{(p_1, p_2) \in \Delta_1 | (p_1, p_2) = \lambda(0,1) + (1-\lambda)(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}), \lambda \in [0,1]\}$.

Άσκηση 7 *Προσδιορίστε τη σταθερά Lipschitz που καθιστά το συνεπές μέτρο κινδύνου της προηγούμενης άσκησης ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση ως προς την ℓ^∞-νορμ στον $\mathbb{R}^2$.*

Λύση: Σύμφωνα με τη θεωρία, αφού το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων-συμβολαίων, το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι συνεπές μέτρο κινδύνου και άρα είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά ίση με 1 ως προς την $\|.\|_\infty$-νορμ στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$|\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(x) - \rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(y)| \leq \|x - y\|_\infty.$$

Άσκηση 8 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1, 2\}$. Έστω επενδυτής ο οποίος θέλει να ελαχιστοποιήσει τον κίνδυνο ως προς το μέτρο με $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ όπου $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -5x\}$. Υποθέτουμε ότι στην αγορά είναι διαθέσιμα δύο αξιόγραφα των οποίων οι αποδόσεις την χρονική περίοδο 1 είναι $x_1 = (1, -\frac{1}{2})$ και $x_2 = (-3, 5)$. Ο επενδυτής αυτός μπορεί να επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ αποτελούμενο από a μερίδια του πρώτου και b μερίδια του δεύτερου αξιογράφου. Αν $-1 \leq a \leq 2$ και $0 \leq b \leq 3$ διατυπώστε το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου του επενδυτή. Γιατί το πρόβλημα αυτό έχει λύση ; Μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο των λύσεών του;*

Λύση:

Έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου

$$Minimize\ \rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(x)\ s.t.\ x \in \mathcal{X} \tag{1}$$

όπου $\mathcal{X} = \{ax_1 + bx_2 | a \in [-1, 2], b \in [0, 3]\}$ με $x_1 = (1, -\frac{1}{2}), x_2 = (-3, 5)$, αν $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \geq 0, y \geq 0\}$.

Το σύνολο των περιορισμών είναι συμπαγές, άρα το πρόβλημα βελτιστοποίησης έχει λύση, μιας και το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(x)$ είναι συνεπές και άρα είναι συνεχής συνάρτηση.

Έχουμε βρει ότι το σύνολο των συναρτησιακών αναπαράστασης του $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι το $\{\lambda(0, 1) + (1 - \lambda)(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}) | \lambda \in [0, 1]\}$. Οπότε το τυχόν στοιχείο του συνόλου αυτού είναι $\pi_\lambda = (-\frac{5\lambda}{6} + \frac{5}{6}, 1 + \frac{5\lambda}{6}), \lambda \in [0, 1]$. Τα στοιχεία $-x$ είναι της μορφής $a(-1, \frac{1}{2}) + b(3, -5)$, άρα το εσωτερικό γινόμενο $\pi_\lambda(-x)$ γίνεται $\pi_\lambda(-x) = \frac{5}{12}\lambda(3a - 16b) - \frac{1}{3}a$. Για να βρούμε το supremum των π_λ όταν το λ μεταβάλλεται στο $[0, 1]$ πρέπει να εξετάσω το πρόσημο της παράστασης $3a - 16b$ για τις διάφορες τιμές των a, b. Όταν το πρόσημο της παράστασης αυτής είναι θετικό, δηλαδή όταν $3a - 16b \geq 0$ το supremum λαμβάνεται στο $\lambda = 1$ και είναι ίσο με $\frac{1}{12}a - \frac{20}{3}b$. Θέλοντας να βρούμε τα χαρτοφυλάκια που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο στην περίπτωση αυτή, έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$Minimize\ \frac{1}{12}a - \frac{20}{3}b,\ s.t.\ 3a - 16b \geq 0,\ a \in [-1, 2],\ b \in [0, 3]. \tag{2}$$

Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που προκύπτει από το πρώτο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι το $(2, \frac{3}{8})$.

Όταν το πρόσημο της παράστασης αυτής είναι αρνητικό, δηλαδή όταν $3a - 16b < 0$ το supremum λαμβάνεται στο $\lambda = 0$ και είναι ίσο με $-\frac{1}{3}a$. Θέλοντας να βρούμε τα χαρτοφυλάκια που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο στην περίπτωση αυτή, έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$Minimize\ -\frac{1}{3}a,\ s.t.\ 3a - 16b < 0,\ a \in [-1, 2],\ b \in [0, 3]. \tag{3}$$

Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που προκύπτει από το δεύτερο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι το $(2, \frac{3}{8})$. Και στις δύο περιπτώσεις δηλαδή το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που προκύπτει είναι το ίδιο, που αποτελεί και τη λύση του προβλήματος.

Άσκηση 9 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι το* $\Omega = \{1, 2\}$. *Αν σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων αναπαρίσταται στον άξονα των τετμημένων η μέση αυριανή απόδοση* $\mathbb{E}(x)$ *μιας επένδυσης της οποίας η απόδοση περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή* x *και στον άξονα των τεταγμένων ο κίνδυνος* $\rho(x)$ *αυτής ως προς το μέτρο κινδύνου* $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ *της προηγούμενης άσκησης, να προσδιοριστεί το σύνολο των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων μέσης απόδοσης -κινδύνου σε επίπεδο κινδύνου* 2 *αν οι δυνατότητες επιλογής των επενδύσεων είναι ίδιες με αυτές της προηγούμενης άσκησης και οι αντικειμενικές πιθανότητες για τις καταστάσεις του κόσμου είναι* $\mu_1 = \frac{1}{3}, \mu_2 = \frac{2}{3}$.

Λύση: Η μέση απόδοση του $a(1, -\frac{1}{2}) + b(-3, 5)$ είναι $a0 + \frac{7}{3}b = \frac{7}{3}b$. Άρα στο ζεύγος μέσης απόδοσης- κινδύνου, η πρώτη συντεταγμένη είναι της μορφής $\frac{7}{3}b$ και η δεύτερη συντεταγμένη βάσει της προηγούμενης άσκησης είναι $\frac{1}{12}a - \frac{20}{3}b$ για τα χαρτοφυλάκια (a, b) του συνόλου των περιορισμών για τα οποία $3a - 16b \geq 0$, ενώ είναι ίση με $-\frac{1}{3}a$ για τα χαρτοφυλάκια του συνόλου των περιορισμών για τα οποία ισχύει ότι $3a - 16b < 0$. Για τα χαρτοφυλάκια εκείνα για τα οποία έχουν κίνδυνο μικρότερο του 2 πρσδιορίζουμε το άποτελεσματικό σύνορο΄ με τη βοήθεια του κώνου των χαρτοφυλακίων με μη θετικό κίνδυνο και μη αρνητική απόδοση.

Άσκηση 10 *Αν επενδυτής έχει την συνάρτηση ωφελιμότητας* $u(x) = \mathbb{E}(x) - 3\rho(x),\ x \in \mathbb{R}^2$ *όπου* ρ *είναι το μέτρο κινδύνου των δύο προηγούμενων ασκήσεων, να βρεθεί ποια χαρτοφυλάκια μεγιστοποιούν την ωφελιμότητά του, αν οι δυνατότητες επιλογής των επενδύσεων είναι ίδιες με αυτές των δύο προηγούμενων ασκήσεων και οι αντικειμενικές πιθανότητες για τις καταστάσεις του κόσμου είναι* $\mu_1 = \frac{1}{3}, \mu_2 = \frac{2}{3}$.

Λύση:

Όπως και στην Άσκηση 8 το σύνολο των περιορισμών είναι συμπαγές, άρα το πρόβλημα βελτιστοποίησης έχει λύση, μιας και το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(x)$ είναι συνεπές και άρα είναι συνεχής συνάρτηση γιατί και η μέση τιμή είναι συνεχής συνάρτηση και άρα η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή είναι συνεχής, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^2$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η μέση απόδοση ενός χαρτοφυλακίου (a, b) είναι $\frac{7}{3}b$. Επίσης η συνάρτηση $\rho(x)$ ως συνάρτηση των μεριδίων του χαρτοφυλακίου είναι $\frac{1}{12}a - \frac{20}{3}b$ για τα χαρτοφυλάκια (a, b) του συνόλου των περιορισμών για τα οποία $3a - 16b \geq 0$, ενώ είναι ίση με $-\frac{1}{3}a$ για τα χαρτοφυλάκια του συνόλου των περιορισμών για τα οποία ισχύει ότι $3a - 16b < 0$. Επομένως η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή λαμβάνει την τιμή $\frac{7}{3}b - 3(\frac{1}{12}a - \frac{20}{3}b)$ για τα χαρτοφυλάκια (a, b) του συνόλου των περιορισμών για τα οποία $3a - 16b \geq 0$, ενώ λαμβάνει την τιμή $\frac{7}{3}b - 3\frac{1}{3}(-a)$ για τα χαρτοφυλάκια του συνόλου των περιορισμών για τα οποία ισχύει ότι $3a - 16b < 0$. Μετά από πράξεις επομένως, έχουμε ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή λαμβάνει την τιμή $\frac{67}{3}b - \frac{1}{4}a$ για τα χαρτοφυλάκια (a, b) του συνόλου των περιορισμών για τα οποία $3a - 16b \geq 0$, ενώ λαμβάνει την τιμή $\frac{7}{3}b - a$ για τα χαρτοφυλάκια του συνόλου των περιορισμών για τα οποία ισχύει ότι $3a - 16b < 0$.

Επομένως, το πρόβλημα μεγιστοποίησης της συνάρτησης ωφελιμότητας αναλύεται στα ακόλουθα δύο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού:

$$Maximize\ \frac{67}{3}b - \frac{1}{4}a,\ s.t.\ 3a - 16b \geq 0,\ a \in [-1, 2],\ b \in [0, 3]. \tag{4}$$

Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που προκύπτει από το πρώτο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι το $(2, \frac{3}{8})$.

$$Maximize\ \frac{7}{3}b - a,\ s.t.\ 3a - 16b < 0,\ a \in [-1, 2],\ b \in [0, 3]. \tag{5}$$

Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που προκύπτει από το δεύτερο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι το $(-1, 3)$. Παρατηρούμε δηλαδή ότι η λύση του αρχικού προβλήματος μεγιστοποίησης της ωφελιμότητας του επενδυτή εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $3a - 16b$.