΄Διαχείριση Κινδύνου - Risk Management΄
2ο μέρος μαθήματος -ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ
ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Διδάσκων : Χ. Κουντζάκης

24 Ιουνίου 2009

Άσκηση 1 *Αν το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι* $\Omega = \{1, 2\}$ *τότε προσδιορίστε ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του* $\mathbb{R}^2$ *αναπαριστούν συνεπή σύνολα αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων και ποια όχι. Σε κάθε περίπτωση αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

(*i*) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -2x\}$

(*ii*) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 0, y \leq -3x\}$

(*iii*) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -3x\}$

(*iv*) $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 0, y \leq -2x\}$

Λύση: Τα σύνολα που υποδεικνύονται στις περιπτώσεις (ii) και (iv) δεν είναι σύνολα αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων διότι περιέχουν στοιχεία του $\mathbb{R}^2$ με αρνητικές συντεταγμένες. Για παράδειγμα, $(-1, -2) \in \mathcal{A}$ στην περίπτωση (ii) και $(-1, -1) \in \mathcal{A}$ στην περίπτωση (iv). Για την περίπτωση (i), έστω $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ στοιχεία του $\mathcal{A}$. Τότε ισχύοουν τα εξής: $x_2 + 2x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, $y_2 + 2y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$. Για το διάνυσμα $X + Y$ ισχύει ότι $(x_2 + y_2) + 2(x_1 + y_1) \geq 0, x_2 + y_2 \geq 0$ και επομένως $X + Y \in \mathcal{A}$. Για το διάνυσμα λX με $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $\lambda x_2 + 2(\lambda x_1) \geq 0$ και $\lambda x_2 \geq 0$. Άρα $\lambda X \in \mathcal{A}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Επίσης αν $X \in \mathbb{R}^2_+$ ισχύει ότι $x_2 + 2x_1 \geq 0$ και $x_2 \geq 0$, άρα $X \in \mathcal{A}$. Τέλος, αν υποθέσουμε ότι για το $X = (x_1, x_2)$ ισχύει $x_1, x_2 < 0$ αυτό σημαίνει ότι $X \notin \mathcal{A}$ διότι αν το X ανήκε στο $\mathcal{A}$ θα ήταν $x_2 \geq 0$. Επομένως το $\mathcal{A}$ στο (i) είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων. Ομοίως εργαζόμαστε και στην περίπτωση (iii) όπου πάλι το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων.

Άσκηση 2 *Αν το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι* $\Omega = \{1, 2\}$ *και* $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -4x\}$, *να δείξετε ότι το σύνολο αυτό είναι συνεπές σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων και προσδιορίστε το* $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X)$ *αν* $X = (1, 2), X = (-1, 7)$. *Με* $\mathbf{1}$ *συμβολίζουμε τη χωρίς κίνδυνο απόδοση* $(1, 1)$.

Λύση:

Στην περίπτωση που $X = (1, 2)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m) + (1, 2) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m+1, m+2) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m+2+4(m+1) \geq 0, m+2 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m + 6 \geq 0, m + 2 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m + 6 \geq 0\} = -\frac{6}{5}.$$

Στην περίπτωση που $X = (-1, 7)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m) + (-1, 7) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m-1, m+7) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m+7+4(m-1) \geq 0, m+7 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m + 3 \geq 0, m + 7 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m + 3 \geq 0\} = -\frac{3}{5}.$$

Το γεγονός ότι $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(1, 2) < 0, \rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(-1, 7) < 0$ είναι αναμενόμενο, μιας και $(1, 2), (-1, 7) \in \mathcal{A}$ και $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ διότι το $\mathcal{A}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.

Άσκηση 3 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1, 2\}$. Έστω επενδυτής του οποίου η σχέση προτίμησης πάνω στο σύνολο των χρηματοοικονομικών θέσεων ορίζεται από την συνάρτηση ωφελιμότητας $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $u = -\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ όπου $\mathcal{A}$ το σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων της προηγούμενης άσκησης. Ποια από τις ακόλουθες επενδύσεις είναι προτιμότερη για αυτόν μεταξύ των $X_1 = (-1, 0)$, $X_2 = (3, -2)$, $X_3 = (0, 4)$, $X_4 = (3, -5)$;*

Λύση:
Στην περίπτωση που $X = (-1, 0)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m) + (-1, 0) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m - 1, m) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m + 4(m - 1) \geq 0, m \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m - 4 \geq 0, m \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m - 4 \geq 0\} = \frac{4}{5}.$$

Στην περίπτωση που $X = (3, -2)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m) + (3, -2) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m+3, m-2) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m-2+4(m+3) \geq 0, m-2 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m + 10 \geq 0, m - 2 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m - 2 \geq 0\} = 2.$$

Στην περίπτωση που $X = (0, 4)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m) + (0, 4) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m + 4) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m + 4 + 4m \geq 0, m + 4 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m + 4 \geq 0, m + 4 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m + 4 \geq 0\} = -\frac{4}{5}.$$

Στην περίπτωση που $X = (3, -5)$ έχουμε

$$\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | m\mathbf{1} + X \in \mathcal{A}\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | (m, m) + (3, -5) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | (m+3, m-5) \in \mathcal{A}\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m-5+4(m+3) \geq 0, m-5 \geq 0\} =$$

$$= \inf\{m \in \mathbb{R} | 5m + 7 \geq 0, m - 5 \geq 0\} = \inf\{m \in \mathbb{R} | m - 5 \geq 0\} = 5.$$

Άρα οι αντίστοιχες τιμές της u είναι $u(X_1) = -\frac{4}{5}, u(X_2) = -2, u(X_3) = \frac{4}{5}, u(X_4) = -5$. Επομένως η προτιμότερη επένδυση είναι η επιλογή του συμβολαίου με απόδοση X_3.

Άσκηση 4 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Το σύνολο των σεναρίων για τις αντικειμενικές πιθανότητες των καταστάσεων του κόσμου είναι το τρίγωνο $\mathcal{P}$ του simplex του $\mathbb{R}^3_+$ που αποτελείται από όλους τους κυρτούς συνδυασμούς των ακόλουθων διανυσμάτων πιθανοτήτων για τις καταστάσεις του κόσμου: $p_1 = (1, 0, 0), p_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), p_3 = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$. Αν $\rho_{\mathcal{P}}$ είναι το συνεπές μέτρο κινδύνου που ορίζεται στο $\mathbb{R}^3$ ως προς το $\mathcal{P}$, δηλαδή $\rho_{\mathcal{P}}(X) = \sup\{\pi(-X) | \pi \in \mathcal{P}\}$, να προσδιορίσετε το ασφάλιστρο των χρηματοοικονομικών θέσεων $X_1 = (-1, 3, 0), X_2 = (-1, 1, -1)$ ως προς αυτό το μέτρο κινδύνου.*

Λύση: Το σύνολο $\mathcal{P}$ είναι φραγμένο επειδή είναι υποσύνολο του simplex του $\mathbb{R}^3_+$. Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα $p_1 = (1, 0, 0), p_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), p_3 = (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ άρα είναι μια βάση του. Αν $p \in \mathbb{R}^3$ τότε το ανάπτυγμα ως προς τα p_1, p_2, p_3 του p είναι $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$. Η συνάρτηση $\|.\|$ με $\|p\| = |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3|$ είναι μια νορμ στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$ (η απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας και της θετικής ομογένειας είναι απλή, για το ότι $\|p\| = 0$ συνεπάγεται $p = 0$, αυτό έπεται από τη γραμμική ανεξαρτησία των p_1, p_2, p_3 και τον ορισμό της $\|.\|$). Επομένως επειδή στον $\mathbb{R}^n$ όλες οι νορμ είναι ισοδύναμες, για να εξετάσουμε αν το $\mathcal{P}$ είναι κλειστό, αρκεί να εξετάσουμε αν είναι κλειστό ως προς τη νορμ $\|.\|$. Το $\mathcal{P}$ περιγράφεται ως εξής $\{p \in \mathbb{R}^3_+ | \|p\| = 1\}$. Άρα αν $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $\mathcal{P}$ τέτοια ώστε $p_n \to p$ ως προς τη νορμ $\|.\|$ Αφού $p_n = \lambda_{n,1} p_1 + \lambda_{n,2} p_2 + \lambda_{n,3} p_3$ με $\lambda_{n,i} \in [0, 1], i = 1, 2, 3$ και $\lambda_{n,1} + \lambda_{n,2} + \lambda_{n,3} = 1$ $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$, είναι $\lambda_{n,i} \longrightarrow \lambda_i, i = 1, 2, 3$ και αφού το $[0, 1]$ είναι κλειστό υποσύνολο των πραγματικών $\lambda_i \in [0, 1], i = 1, 2, 3$, ενώ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Άρα $p \in \mathcal{P}$. Επομένως το $\mathcal{P}$ είναι κλειστό και επειδή είναι και φραγμένο, είναι συμπαγές. Άρα το supremum στο $\rho_{\mathcal{P}}(X) = \sup\{\pi \cdot (-X) | \pi \in \mathcal{P}\} = \sup\{(-X) \cdot \pi | \pi \in \mathcal{P}\}$ είναι maximum. Το μέγιστο λαμβάνεται σε κάποια από τις κορυφές του $\mathcal{P}$, αφού το $\mathcal{P}$ είναι πολύτοπο. Άρα δεν έχουμε παρά να υπολογίσουμε τα εσωτερικά γινόμενα $(-X_1) \cdot p_i, i = 1, 2, 3$ για να διαπιστώσουμε ποιο δίνει τη μεγαλύτερη τιμή. Είναι $(-X_1) \cdot p_1 = 1, (-X_1) \cdot p_2 = -\frac{2}{3}, (-X_1) \cdot p_3 = \frac{1}{3}$. Επομένως $\rho_{\mathcal{P}}(X_1) = 1$. Ομοίως για το X_2 είναι $(-X_2) \cdot p_1 = 1, (-X_2) \cdot p_2 = \frac{1}{3}, (-X_2) \cdot p_3 = \frac{2}{3}$. Επομένως $\rho_{\mathcal{P}}(X_2) = 1$.

Άσκηση 5 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1, 2\}$. Να προσδιοριστεί το σύνολο των συναρτησιακών που αναπαριστούν το συνεπές μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ αν το σύνολο των αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων είναι το $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -2x\}$.*

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο όπως και στην Άσκηση 1 μπορούμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων. Επομένως από γνωστή πρόταση το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι συνεπές μέτρο κινδύνου. Άρα υπάρχει σύνολο διανυσμάτων πιθανότητας για τις καταστάσεις του κόσμου $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ το οποίο είναι υποσύνολο του simplex Δ_1 του $\mathbb{R}^2_+$, τέτοιο ώστε $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \sup\{\pi(-X) | \pi \in \mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}\}$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^2$. Από γνωστή πρόταση έχουμε όμως ότι $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}} = \Delta_1 \cap \mathcal{A}^\circ$, όπου $\mathcal{A}^\circ$ η δυϊκή σφήνα του $\mathcal{A}$. Για να προσδιορίσουμε το σύνολο $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$, πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε το $\mathcal{A}^\circ$. Έστω $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Αν $b < 0$ τότε $(a, b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $b = (a, b) \cdot (0, 1)$ και $(0, 1) \in \mathcal{A}$. Επίσης αν $a < 0$ τότε $(a, b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $a = (a, b) \cdot (1, 0)$ και $(1, 0) \in \mathcal{A}$. Ακόμη αν το διάνυσμα (a, b) είναι τέτοιο ώστε $2b - a < 0$, τότε $(a, b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $2b - a = (a, b) \cdot (-1, 2)$ και $(-1, 2) \in \mathcal{A}$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία $b \geq 0, a \geq 0, b \geq \frac{a}{2}$ ανήκουν στο $\mathcal{A}^\circ$. Τότε θα έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{A}^\circ$ είναι ακριβώς ο κώνος του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από αυτά τα διανύσματα. Έστω $(x, y) \in \mathcal{A}$ και $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ με $a \geq 0, b \geq 0, b \geq \frac{a}{2}$. Τότε $(a, b) \cdot (x, y) = ax + by \geq ax + \frac{1}{2}ay = a(x + \frac{1}{2}y) \geq 0$ διότι $a \geq 0$ και $y \geq -2x$. Άρα το $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ αποτελείται από τα διανύσματα (a, b) του Δ_1 για τα οποία ισχύει ότι $b \geq \frac{1}{2}a$. Για να τα προσδιορίσουμε, βρίσκουμε το σημείο τομής των ευθειών $a + b = 1$ και $b = \frac{1}{2}a$, το οποίο είναι το $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Επομένως το $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ δεν είναι παρά το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0, 1), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, δηλαδή $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}} = \{(p_1, p_2) \in \Delta_1 | (p_1, p_2) = \lambda(0, 1) + (1 - \lambda)(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \lambda \in [0, 1]\}$.

Άσκηση 6 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1, 2\}$. Να προσδιοριστεί το σύνολο των συναρτησιακών που αναπαριστούν το συνεπές μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ αν το σύνολο των αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων είναι το $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 0, y \geq -3x\}$.*

Λύση:

Με παρόμοιο τρόπο όπως και στην Άσκηση 1 μπορούμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων. Επομένως από γνωστή πρόταση το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι συνεπές μέτρο κινδύνου. Άρα υπάρχει σύνολο διανυσμάτων πιθανότητας για τις καταστάσεις του κόσμου $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ το οποίο είναι υποσύνολο του simplex Δ_1 του $\mathbb{R}^2_+$, τέτοιο ώστε $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) = \sup\{\pi(-X) | \pi \in \mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}\}$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^2$. Από γνωστή πρόταση έχουμε όμως ότι $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}} = \Delta_1 \cap \mathcal{A}^\circ$, όπου $\mathcal{A}^\circ$ η δυϊκή σφήνα του $\mathcal{A}$. Για να προσδιορίσουμε το σύνολο $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$, πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε το $\mathcal{A}^\circ$. Έστω $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Αν $b < 0$ τότε $(a, b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $b = (a, b) \cdot (0, 1)$ και $(0, 1) \in \mathcal{A}$. Επίσης αν $a < 0$ τότε $(a, b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $a = (a, b) \cdot (1, 0)$ και $(1, 0) \in \mathcal{A}$. Ακόμη αν το διάνυσμα (a, b) είναι τέτοιο ώστε $3b - a < 0$, τότε $(a, b) \notin \mathcal{A}^\circ$, διότι $3b - a = (a, b) \cdot (-1, 3)$ και $(-1, 3) \in \mathcal{A}$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ για τα οποία $b \geq 0, a \geq 0, b \geq \frac{a}{3}$ ανήκουν στο $\mathcal{A}^\circ$. Τότε θα έχουμε δείξει ότι το σύνολο $\mathcal{A}^\circ$ είναι ακριβώς ο κώνος του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από αυτά τα διανύσματα. Έστω $(x, y) \in \mathcal{A}$ και $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ με $a \geq 0, b \geq 0, b \geq \frac{a}{3}$. Τότε $(a, b) \cdot (x, y) = ax + by \geq ax + \frac{1}{3}ay = a(x + \frac{1}{3}y) \geq 0$ διότι $a \geq 0$ και $y \geq -3x$. Άρα το $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ αποτελείται από τα διανύσματα (a, b) του Δ_1 για τα οποία ισχύει ότι $b \geq \frac{1}{3}a$. Για να τα προσδιορίσουμε, βρίσκουμε το σημείο τομής των ευθειών $a + b = 1$ και $b = \frac{1}{3}a$, το οποίο είναι το $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$. Επομένως το $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}}$ δεν είναι παρά το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0, 1), (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, δηλαδή $\mathcal{P}_{\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}} = \{(p_1, p_2) \in \Delta_1 | (p_1, p_2) = \lambda(0, 1) + (1 - \lambda)(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}), \lambda \in [0, 1]\}$.

Άσκηση 7 *Προσδιορίστε τη σταθερά Lipschitz που καθιστά το συνεπές μέτρο κινδύνου της προηγούμενης άσκησης ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση ως προς την ℓ^1-νορμ στον $\mathbb{R}^2$.*

Λύση: Σύμφωνα με τη θεωρία, αφού το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων-συμβολαίων, το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι συνεπές μέτρο κινδύνου και άρα είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά ίση με 1 ως προς την $\|.\|_\infty$-νορμ στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή για κάθε $X, Y \in \mathbb{R}^2$

$$|\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(X) - \rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty.$$

Αλλά είναι $\|X - Y\|_\infty \leq \|X - Y\|_1$ για κάθε $X, Y \in \mathbb{R}^2$ και επομένως η σταθερά ως προς την οποία το $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι συνάρτηση Lipschitz είναι επίσης $k = 1$.

Άσκηση 8 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι $\Omega = \{1, 2\}$. Έστω επενδυτής του οποίου η σχέση προτίμησης πάνω στο σύνολο των χρηματοοικονομικών θέσεων ορίζεται από την συνάρτηση ωφελιμότητας $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $u = -\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ όπου $\mathcal{A}$ το σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών θέσεων της προηγούμενης άσκησης. Υποθέτουμε ότι στην αγορά είναι διαθέσιμα δύο αξιόγραφα των οποίων οι αποδόσεις την χρονική περίοδο 1 είναι $X_1 = (1, -\frac{1}{2})$ και $X_2 = (-3, 5)$. Ο επενδυτής αυτός μπορεί να επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ αποτελούμενο από a μερίδια του πρώτου και b μερίδια του δεύτερου αξιογράφου. Αν $-\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ και $-1 \leq b \leq 8$ διατυπώστε το πρόβλημα βελτιστοποίησης του επενδυτή. Γιατί το πρόβλημα αυτό έχει λύση ;*

Λύση:
Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει ο επενδυτής είναι το ακόλουθο: Μεγιστοποίησε $u(X)$ αν $X = aX_1 + bX_2, a \in [-\frac{1}{2}, 2], b \in [-1, 8]$. Η συνάρτηση ωφελιμότητας u του επενδυτή είναι συνεχής διότι το μέτρο κινδύνου $\rho_{\mathcal{A},\mathbf{1}}$ είναι συνεχής συνάρτηση, εφ΄ όσον το $\mathcal{A}$ είναι σύνολο αποδεκτών χρηματοοικονομικών συμβολαίων. Αν δείξουμε ότι το σύνολο των περιορισμών του προβλήματος είναι συμπαγές σύνολο του $\mathbb{R}^2$, τότε το πρόβλημα έχει λύση. Για να δείξουμε ότι το σύνολο των περιορισμών είναι συμπαγές, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό και φραγμένο. Τα διανύσματα X_1 και X_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^2$. Επομένως, έστω $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ το ανάπτυγμα του διανύσματος X ως προς τη βάση των X_1, X_2. Τότε, όπως παρατηρήσαμε στην Άσκηση 4 η συνάρτηση $\|.\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\|X\| = |\lambda_1| + |\lambda_2|$ είναι μια νορμ στον $\mathbb{R}^2$. Επομένως αν $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο σύνολο των περιορισμών με $X_n \to X$ αυτό συνεπάγεται -εφ΄ όσον $X_n = a_n X_1 + b_n X_2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $X = a_0 X_1 + b_0 X_2$- ότι $a_n \to a_0, b_n \to b_0$. Όμως τα σύνολα στα οποία ανήκουν οι συντελεστές του αναπτύγματος ως προς τη βάση των X_1, X_2 κάθε στοιχείου X που ανήκει στο σύνολο των περιορισμών του προβλήματος, είναι κλειστά σύνολα του $\mathbb{R}$. Άρα $a_0 \in [-\frac{1}{2}, 2], b_0 \in [-1, 8]$ και επομένως το σύνολο των περιορισμών του προβλήματος είναι κλειστό. Για να δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι και φραγμένο, αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένο ως προς τη νορμ που ορίσαμε παραπάνω, μιας και στον $\mathbb{R}^2$ όλες οι νορμ είναι ισοδύναμες. Ισχύει ότι $\|X_1\| = 1, \|X_2\| = 1$. Άρα $\|X\| = \|aX_1 + bX_2\| \leq |a|\|X_1\| + |b|\|X_2\| = |a| + |b| \leq 2 + 8 = 10$. Άρα το σύνολο των περιορισμών είναι φραγμένο, μιας και περιέχεται σε μια μπάλα με κέντρο το 0, ως προς τη νορμ $\|.\|$. Επομένως το πρόβλημα του επενδυτή έχει λύση.

Άσκηση 9 *Υποθέτουμε ότι το σύνολο των καταστάσεων του κόσμου είναι το πεπερασμένο σύνολο Ω. Αν σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων αναπαρίσταται στον άξονα των τετμημένων η μέση αυριανή απόδοση $\mu(X)$ μιας επένδυσης της οποίας η απόδοση περιγράφεται από την τυχαία μεταβλητή X και στον άξονα των τεταγμένων ο κίνδυνος $\rho(X)$ αυτής ως προς ένα συνεπές μέτρο κινδύνου ρ, σε ποιο τεταρτημόριο θα ανήκουν οι επενδύσεις τις οποίες όλοι οι επενδυτές θα ήθελαν να κατέχουν ;*

Λύση: Τα χρηματοοικονομικά συμβόλαια που όλοι οι επενδυτές θα επιθυμούσαν να κατέχουν είναι εκείνα για τα οποία η τυχαία μεταβλητή X της απόδοσής τους είναι τέτοια ώστε $\mu(X) \geq 0$ και $\rho(X) \leq 0$, δηλαδή εκείνα τα συμβόλαια τα οποία έχουν θετική μέση απόδοση και δεν περικλείουν κίνδυνο σύμφωνα με το μέτρο κινδύνου ρ. Στο σύστημα αξόνων μέσης απόδοσης -κινδύνου αυτά τα συμβόλαια ανήκουν στο τέταρτο τεταρτημόριο.

Άσκηση 10 *Αν στο παραπάνω πλαίσιο το σύνολο των ζευγών μέσης απόδοσης -κινδύνου ενός συνόλου επενδύσεων είναι ο μοναδιαίος κυκλικός δίσκος, ποιες επενδύσεις θα επιλέγατε για τους πελάτες σας και γιατί ;*

Λύση: Οι επενδυτές σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση υιοθετούν την ακόλουθη σχέση προτίμησης πάνω στο σύνολο των επενδύσεων που είναι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$:

$$Y \succeq_{\mu,\rho} X \Longleftrightarrow \mu(Y) \geq \mu(X), \rho(X) \geq \rho(Y).$$

Αν οι δύο αυτές ανισότητες ισχύουν τότε οι επενδυτές προτιμούν την Y από την X. Αν μία από τις δύο ανισότητες που ορίζει την σχέση προτίμησης είναι γνήσια, τότε ο αντίστοιχος συμβολισμός είναι $Y \succ_{\mu,\rho} X$. Οι επενδύσεις που θα επιλέγονταν στην προκειμένη περίπτωση είναι εκείνες των οποίων η τυχαία μεταβλητή απόδοσης X είναι τέτοια ώστε δεν υπάρχουν άλλα συμβόλαια των οποίων η τυχαία μεταβλητή απόδοσης Y να είναι τέτοια ώστε $Y \succ_{\mu,\rho} X$. Το σύνολο των επενδύσεων μεταξύ των οποίων οι επενδυτές καλούνται να επιλέξουν είναι το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών $X \in \mathbb{R}^n$ (όπου n είναι το πλήθος των καταστάσεων του κόσμου και υποθέτουμε ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\pi} \in \Delta_{n-1}$ αντικειμενικών πιθανοτήτων για τις καταστάσεις αυτές) για τις οποίες ισχύει $\mu^2(X) + \rho^2(X) \leq 1$. Το σύνολο των επενδύσεων X που επιθυμούν οι επενδυτές αντιστοιχούν σε ένα ζεύγος $(\mu(X), \rho(X))$ με $\mu(X) \geq 0, \rho(X) \leq 0$. Το σύνολο των επενδύσεων που θα έπρεπε να επιλεγεί σύμφωνα με αυτήν την σχέση προτίμησης είναι το σύνολο των επενδύσεων των οποίων τα ζεύγη μέσης απόδοσης -κινδύνου ανήκουν στο αποτελεσματικό σύνορο του κυκλικού δίσκου ως προς τον κώνο του $\mathbb{R}^2$ που υποδεικνύει το τέταρτο τεταρτημόριο, δηλαδή τα συμβόλαια με απόδοση X που αντιστοιχεί στα σημεία $(\mu(X), \rho(X))$ με $\mu(X) \geq 0, \rho(X) \leq 0$ και $\mu^2(X) + \rho^2(X) = 1$.