Δειγματοληψία

- Πρέπει να γνωρίζουμε πως πήραμε το δείγμα
- Το πλήθος n_{ij} των παρατηρήσεων σε κάθε κελί είναι τ.μ. με μ_{ij} συμβολίζουμε την μέση τιμή:

$$E\left(n_{ij}\right) = \mu_{ij}$$

- Επομένως στην δειγματοληψία πινάκων συνάφειας αναφερόμαστε στον τρόπο της δειγματοληψίας που επιλέξαμε το δείγμα μας με βάση την διάταξη και την δυνατότητα συνδυασμών των κελιών.
- Επομένως μπορούμε να έχουμε

1. Μοναδιαίους πίνακες (μόνο γραμμές)
2. Πίνακες συνάφειας (συνδυαζόμενες γραμμές και στήλες)
3. Ανεξάρτητους μονοδιάστατους πίνακες (ανεξάρτητες γραμμές)

Ανάλογα με τα παραπάνω σχήματα δειγματοληψίας έχουμε και τα αντίστοιχα μοντέλα

Δειγματοληψία Poisson

- Παρατηρούμε ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Poisson και n_{ij} οι τιμές που παίρνουν οι τ.μ.
- Επομένως έχουμε μοντελοποίηση μονοδιάστατου πίνακα με μορφή

Μεταβλητή X
n_1
n_2
:
:
n_k

Μεταβλητές	Y1	Y2
X1	n_{11}	n_{12}
X2	n_{21}	n_{22}
X3	n_{31}	n_{32}

συχνότητες

Μεταβλητή X
n_{11}
n_{12}
n_{21}
n_{22}
n_{31}
n_{32}

Μετατροπή δισδιάστατου σε μονοδιάστατο πίνακα

Πολυωνυμική Δειγματοληψία

- Παίρνουμε τυχαία n άτομα και για το καθένα καταγράφουμε σε ποια κατηγορία X_1, X_2,…, X_I, και Y_1, Y_2,…, Y_J, ανήκουν. Έτσι n_{ij} είναι το πλήθος των ατόμων στο κελί (X_I, Y_J)
- Επομένως έχουμε μοντελοποίηση πίνακα διπλής εισόδου με μορφή

Συνδιασμός (X_I, Y_J)

Μεταβλητές	Y1	Y2
X1	n_{11}	n_{12}
X2	n_{21}	n_{22}
X3	n_{31}	n_{32}

Ανεξάρτητη Πολυωνυμική

- Παίρνουμε τ.δ. μεγέθους $n_{1.}$ από την κατηγορία X_1, τ.δ. μεγέθους $n_{2.}$ από την κατηγορία X_2,……, και μετράμε σε κάθε κατηγορία πόσα άτομα ανήκουν στην Y_1, Y_2,…, Y_J, και έτσι έχουμε πίνακα συνάφειας (IxJ).
- Επομένως έχουμε μοντελοποίηση ανεξάρτητων μονοδιάστατων πινάκων με μορφή

ανεξάρτητα

Μεταβλητές	Y1	Y2
X1	n_{11}	n_{12}
X2	n_{21}	n_{22}
X3	n_{31}	n_{32}

Σχέση Πολυωνυμικής και Poisson Δειγματοληψίας

Ένα Poisson μοντέλο δειγματοληψίας θεωρεί τις μετρήσεις Y_{ij}, ανεξάρτητες τ.μ. με μέσο μ_{ij} . Η από κοινού σ.π.π. των πιθανών αποτελεσμάτων n_{ij} ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων $P(Y_{ij}=n_{ij})$ για τα κελιά (I,J) που ακολουθούν κατανομή Poisson με

$$P(Y_{ij}) = \prod_i \prod_j \frac{e^{-\mu_{ij}} {\mu_{ij}}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}$$

Σχέση Πολυωνυμικής και Poisson Δειγματοληψίας

- Όταν το μέγεθος του δείγματος n είναι γνωστό αλλά τα αθροίσματα (γραμμών ή στηλών) άγνωστα τότε πολυωνυμικό μοντέλο δειγματοληψίας εφαρμόζεται. Τα κελιά (I,J) είναι τα πιθανά αποτελέσματα με σ.π.π. να ισούται με

$$\frac{n_{..}!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_i \prod_j \pi_{ij}^{n_{ij}}$$

Σχέση Πολυωνυμικής και Poisson Δειγματοληψίας

- Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε επίπεδο της X, έστω X = i, διαθέτουμε n_i, παρατηρήσεις. Έστω επίσης ότι οι μετρήσεις της Y σε ένα επίπεδο της X είναι ανεξάρτητες από αυτές σε ένα άλλο επίπεδο της X, έχοντας συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(\pi_{1|i}, \ldots, \pi_{J|i})$. Τότε για κάθε γραμμή έχουμε ένα διαφορετικό πολυωνυμικό πείραμα. Οι μετρήσεις n_{ij}, j = 1,..., J έχουν την πολυωνυμική κατανομή:

$$\frac{n_{i.}!}{\prod_j n_{ij}!} \prod_j \pi_{j|i}^{n_{ij}}$$

- Όταν τα δείγματα σε διαφορετικές τιμές της *X* είναι ανεξάρτητα τότε η από κοινού κατανομή για ολόκληρο το δείγμα είναι το γινόμενο των πολυωνυμικών κατανομών. Η δειγματοληψία αναφέρεται σαν ανεξάρτητη πολυωνυμική ή και γινόμενο πολυωνυμικής δειγματοληψίας.

Πρόταση

Αν έχουμε δειγματοληψία Poisson με $E(n_{ij}) = \mu_{ij}$ και σ.π.π.

$$f(n_{ij}) = \frac{e^{-\mu_{ij}} \mu_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}$$

τότε η δεσμευμένη κατανομή των n_{ij} όταν $\sum_{ij} n_{ij} = n$ είναι πολυωνυμική με

$$f\left(n_{ij} \mid \sum_{ij} n_{ij} = n \right) = \frac{n!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_{ij} \left(\frac{\mu_{ij}}{\sum_{ij} \mu_{ij}} \right)^{n_{ij}}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι

$$f\left(n_{ij} \mid \sum_{ij} n_{ij} = n\right) = \frac{f\left(n_{ij}\right)}{f\left(\sum_{ij} n_{ij} = n\right)} = \frac{\prod_{ij} \frac{e^{-\mu_{ij}} \mu_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}}{\frac{e^{-\sum_{ij}\mu_{ij}} \sum_{ij} \mu_{ij}^{n_{ij}}}{n!}}$$

$$= \frac{n!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_{ij} \left(\frac{\mu_{ij}}{\sum_{ij} \mu_{ij}}\right)^{n_{ij}}$$

Απόδειξη

Με τελική μορφή

$$f\left(n_{ij} \mid \sum_{ij} n_{ij} = n\right) = \frac{n!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_{ij} \left(\frac{\mu_{ij}}{\mu}\right)^{n_{ij}}$$

αφού άθροισμα ανεξάρτητων Poisson είναι Poisson με

$$f\left(\sum_{ij} n_{ij} = n\right) \sim Pois\left(\sum_{ij} \mu_{ij}\right) = Pois(\mu)$$

Οι πιθανότητες π_{ij} της πολυωνυμικής είναι

$$\pi_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu}$$

Πρόταση

Αν το τυχαίο δείγμα $n=(n_1, n_2,\ldots, n_k)$ ακολουθεί πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p_1, $p_2,\ldots, p_k$ τότε η στατιστική συνάρτηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - E\left\{n_{ij}\right\}\right)^2}{E\left\{n_{ij}\right\}} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\pi\alpha\rho\alpha\tau\eta\rho\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma - \varepsilon\kappa\tau\iota\mu\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\right)^2}{\varepsilon\kappa\tau\iota\mu\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma} = \sum_{\iota=1}^{\kappa} \frac{\left(\mathrm{O}_i - E_i\right)^2}{E_i}$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά ($n\rightarrow\infty$) την x^2 κατανομή με κ-1 βαθμούς ελευθερίας

Θεώρημα

Έστω τυχαίο δείγμα $n=(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ ακολουθεί πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$. Έστω η μηδενική υπόθεση ότι σε μια πολυωνυμική κατανομή με κ-κελιά οι παράμετροι π_i παίρνουν συγκεκριμένες τιμές αλλά άγνωστες. Αν η H_0 είναι αληθής τότε οι αναμενόμενες τιμές σε κάθε ένα κελί από τα κ θα ισούται με $\widehat{\mu}_i = e_i = n\pi_i$. Τότε η στατιστική συνάρτηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\pi_i)^2}{n\pi_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - \widehat{\mu}_i)^2}{\widehat{\mu}_i} \sim x_{k-1}^2$$

ακολουθεί ασυμπτωτικά ($n \to \infty$) την x^2 κατανομή με κ-1 βαθμούς ελευθερίας

Τεστ καλής προσαρμογής

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

- Στην μελέτη των παραμετρικών διαδικασιών για την εκτίμηση και έλεγχο υποθέσεων, οι κατανομές θεωρούνται γνωστές και η προσοχή μας στέφεται στην εκτίμηση μιας ή περισσοτέρων παραμέτρων της κατανομής ή στον έλεγχο της υποθέσεως που αφορά σύνολο τιμών της υπό-εξέτασης παραμέτρου.
- Σύμφωνα με το πρόβλημα, θεωρούμε σύνολο ανεξάρτητων παρατηρήσεων $X_1, X_2, \ldots, X_n$, τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F(x; \theta)$, όπου $\theta=(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_s)$ και μορφή της F άγνωστη.
- Θεωρούμε την δοκιμασία

$$H_0 : F(x;\theta) = F_0(x;\theta)$$

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

όπου F_0 έχει συγκεκριμένη μορφή και θ διάνυσμα παραμέτρων μη καθορισμένο.

Ένας απλός τρόπος κατασκευής δοκιμασιών καλής προσαρμογής είναι η ομαδοποίηση δεδομένων κατά τέτοιο τρόπο ώστε η υπόθεση προσαρμογής να ισοδυναμεί με υπόθεση που αφορά πολυωνυμικές πιθανότητες.

Αυτό επιτυγχάνεται με διαίρεση του εύρους των δυνατών κλάσεων της τ.μ. X σε κ-πλήθος αμοιβαίως αποκλειόμενες κλάσεις.

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

- Υποθέτουμε ότι τυχαίο δείγμα n-παρατηρήσεων X_1, X_2,…., X_n, εξήφθη από την τ.μ. X και ότι η n_i είναι τ.μ. που παριστάνει τον αριθμό των κ-παρατηρήσεων που κατατάσσονται στην i-οστη κλάση.
- Θεωρούμε την υπόθεση προσαρμογής H_0 απλή, επομένως η συνάρτηση κατανομής είναι πλήρως ορισμένη. Άρα η συνάρτηση κατανομής δεν εξαρτάται από παραμέτρους αφού είναι γνωστές κάτω από την H_0 οπότε $F_0(x;\theta) = F_0(x)$.
- Κάτω από την υπόθεση H_0 μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μιας παρατήρησης να καταταγεί σε κάθε μια από τις κλάσεις και να σημειώσουμε τις πιθανότητες αυτές ως p_{10}, p_{20},…, p_{k0}.

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

- Από την ανεξαρτησία των παρατηρήσεων προκύπτει ότι κάτω από την H_0 οι n_i έχουν από κοινού την πολυωνυμική κατανομή που δίνεται από την έκφραση

$$p\left(n_1, n_2, \ldots, n_k \mid H_0\right) = \frac{n_{..}!}{\prod_i n_{ij}!} \prod_i p_{i0}^{n_i}$$

- Έστω F(x) η αληθής συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X με εναλλακτική στην υπόθεση προσαρμογής την $F(x) \neq F_0(x)$ για κάθε x.
- Αν p_i η αληθής πιθανότητα μιας παρατήρησης να καταταγεί στην i-οστή κλάση, η δοκιμασία προσαρμογής με βάση τις συχνότητες n_i ισοδυναμεί με δοκιμασία απλής υπόθεσης που αφορά πολυωνυμικές πιθανότητες.

Δοκιμασίες καλής προσαρμογής

με δοκιμασία H_0: $p_i = p_{i0}$ έναντι H_1: $p_i \neq p_{i0}$ $(i=1,2,\ldots,\kappa)$

- Κάτω από την μηδενική υπόθεση H_0 η τ.μ. n_i έχει αναμενόμενη τιμή np_{i0} και συνεπώς αν οι απόλυτες διαφορές $|n_i - np_{i0}|$ είναι μεγάλες τότε παράγει μαρτυρία κατά της υπόθεσης H_0
- Για την διαδικασία αυτή κατάλληλο τεστ προτείνεται το x^2 με εκφραση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - np_{i0}\right)^2}{np_{i0}} \sim x_{k-1}^2$$

Άσκηση

- Ζάρι το ρίχνουμε 60 φορές και παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

Αποτελέσματα	1	2	3	4	5	6
συχνότητα	13	19	11	8	5	4

H_0 είναι $\pi_i = \frac{1}{6}, i = 1,\ldots,6$

Αναμενόμενες συχνότητες $e_i = n\pi_i = 60\frac{1}{6} = 10$

Έλεγχος

Αποτελέσματα	1	2	3	4	5	6
συχνότητα	13	19	11	8	5	4
Αναμενόμενες	10	10	10	10	10	10

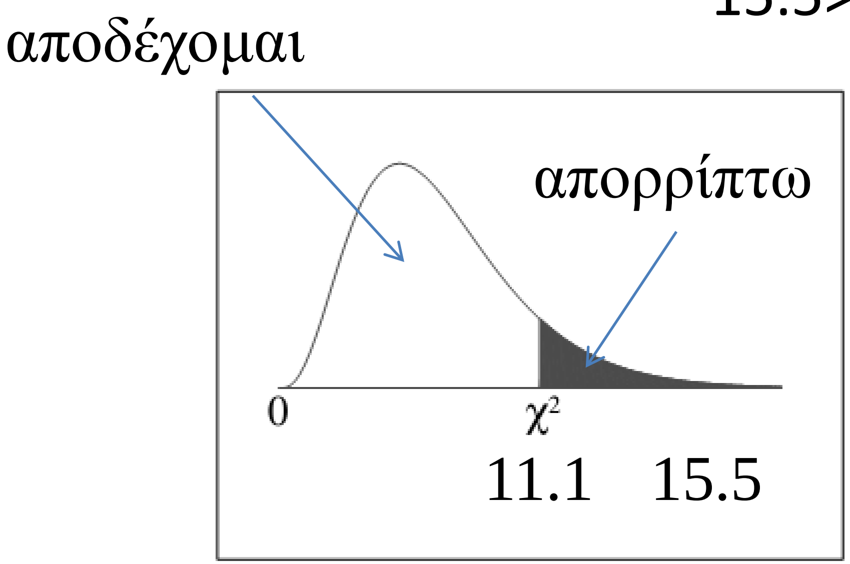
Άσκηση

$$X_* = \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(19-10)^2}{10} + \ldots + \frac{(4-10)^2}{10} = 15.5$$

Από τους πίνακες της x^2 κατανομή με κ-1 β.ε (κ-1=5) έχουμε

$$x^2_{5,0.05} = 11.1$$

15.5>11.1 άρα απορρίπτω την H_0



Θεώρημα

- Έστω τυχαίο δείγμα $n=(n_1, n_2,\ldots, n_k)$. Για μεγάλο n ($n\to\infty$) εφόσον ισχύει η αρχική υπόθεση H_0 η στατιστική συνάρτηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n\pi_i\right)^2}{n\pi_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n \sim x_{k-1-m}^2$$

όπου m=1 από εκθετική ή m=2 από κανονική

Απόδειξη

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - n\pi_i\right)^2}{n\pi_i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2 - 2n\pi_i n_i + n^2\pi_i^2}{n\pi_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{n_i^2}{n\pi_i} - \frac{2n\pi_i n_i}{n\pi_i} + \frac{n^2\pi_i^2}{n\pi_i} \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - 2\sum_{i=1}^{k} n_i + n\sum_{i=1}^{k} \pi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - 2n + n = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n$$

Άσκηση

- Έχουμε

Ώρες λειτουργίας	0-15	15-30	30-45	45-50
τρανζίστορ	50	55	23	12

Τα δεδομένα προέρχονται από εκθετική κατανομή?

Εκθετική κατανομή:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \lambda > 0$$

Απάντηση

- Η παράμετρος λ της εκθετικής είναι άγνωστη. Θα πρέπει να υπολογισθεί από τον υπολογισμό του μέσου:

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \qquad \mu = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{120}\sum_i f_i x_i = \frac{50*7.5+22.5*35+37.5*23+50*12}{120}$$

Μέσος διαστήματος

$$\lambda = \frac{1}{\mu} \Rightarrow \widehat{\lambda} = \frac{1}{\widehat{x}} = 0.0457$$

Απάντηση

- Η αθροιστική συνάρτηση F(x) δίνεται από τον τύπο:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- Άρα έχουμε

$$F(x) = 1 - e^{-\widehat{\lambda} x} = 1 - e^{-0.0457x}$$

- Οι θεωρητικές πιθανότητες εκτιμούνται από:

$$\widehat{p}_1 = P(0 < X \le 15) = F(15) = 1 - e^{-0.0457*15} = 0.496$$

$$\widehat{p}_2 = P(15 < X \le 30) = F(30) - F(15) = 0.249$$

$$\widehat{p}_3 = P(30 < X \le 45) = F(45) - F(30) = 0.126$$

$$\widehat{p}_4 = 1 - \widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 - \widehat{p}_3 = 0.128$$

Απάντηση

- Επομένως οι θεωρητικές παρατηρήσεις δίνονται από την σχέση:

$$x_1 = np_1 = 120 * 0.496 = 59.52$$

Ώρες λειτουργίας	0-15	15-30	30-45	45-50
τρανζίστορ	50	55	23	12
Θεωρητικές	59.52	29.98	15.12	15.37

$$X_* = \frac{(50 - 59.52)^2}{120} + \ldots + \frac{(12 - 15.37)^2}{120} = 7.2$$

Με βάση την διαπίστωση ότι η εκθετική κατανομή έχει μια παράμετρο, οι βαθμοί ελευθερίας γίνονται κ-1-m=4-1-1=2

$x^2_{2,0.05} = 10.59$ 7.2<10.59 άρα αποδέχομαι την H_0

Άσκηση

- Το πλήθος των οχημάτων που θέλει να στρίψει αριστερά σε φανάρι καταμετριέται 120 φορές με

Πλήθος οχημάτων	0	1	2	3	4
συχνότητες	30	32	46	10	2

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω εμπειρική κατανομή προέρχεται από πληθυσμό που ακολουθεί την Poisson?

Απάντηση

Έχουμε H_0: πληθυσμός ~ Poisson

H_1: πληθυσμός διάφορη από Poisson

Η σ.π.π. της Poisson κατανομής δίνεται από την σχέση

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Πλήθος οχημάτων	0	1	2	3	4
συχνότητες	30	32	46	10	2
Πιθανότητες	0.25	0.35	0.23	0.155	

Απάντηση

$$\lambda = E(X) \Rightarrow \hat{\lambda} = \hat{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{120}(0*30+\ldots+4*2) = 1.35$$

$$\hat{p}_0 = P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-1.35}\lambda^{0}}{0!} = 0.259$$

$$\hat{p}_1 = P(X=1) = 0.259*\frac{1.35}{1} = 0.35$$

$$\hat{p}_2 = P(X=2) = 0.35*\frac{1.35}{2} = 0.236$$

$$\hat{p}_3 = 1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 - \hat{p}_3 = 0.155$$

$$\boxed{P(X=x+1) = P(X=x)\frac{\lambda}{(x+1)}}$$

Αναγωγική σχέση

Απάντηση

Πλήθος οχημάτων	0	1	2	3	4
συχνότητες	30	32	46	10	2
Πιθανότητες	0.259	0.35	0.236	0.155	
Εκτιμήσεις	31	42	29	18	

$$\hat{n}_1 = np_1 = 120 * 0.259 = 31$$

Πλήθος οχημάτων	0	1	2	3	4
συχνότητες	30	32	46	10	2
Πιθανότητες	0.259	0.35	0.236	0.155	
Εκτιμήσεις	31	42	29	18	
n^2_i / np_i	29	24.4	73	8	

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n$$

Απάντηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n = 134.4 - 120 = 14.4$$

$x^2_{4-1-1,0.05} = 5.99$

14.4>5.99 άρα απορρίπτω την H_0

Άσκηση

- Ένα τυχαίο δείγμα 500 επιχειρήσεων έδειξε ότι 120 έχουν έντονη δραστηριότητα στο εξωτερικό, 200 μερική και 180 ελάχιστη.
- Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα πραγματικά ποσοστά είναι 28%, 37% και 35% αντίστοιχα (α=0.05)

Απάντηση

- Για να ελέγξουμε αν οι παρατηρούμενες αναλογίες

$$\frac{120}{500}, \frac{200}{500}, \frac{180}{500}$$

συμπίπτουν με τις θεωρητικές 0.28, 0.37, 0.35 εφαρμόζουμε το τέστ καλής προσαρμογής x^2

Έχουμε H_0: $p_1=0.28$, $p_2=0.37$, $p_3=0.35$,

H_1: κάποιο p_i διάφορο της θεωρητικής

Απάντηση

δραστηριότητα	έντονη	μερική	Ελάχιστη
Συχνότητες (f_i)	120	200	180
Πιθανότητες (p_i)	0.28	0.37	0.35
Εκτιμήσεις	140	185	175

θεωρητικές

$\mu_i = np_i = 500 * p_i$

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n = \frac{120^2}{140} + \frac{200^2}{185} + \frac{180^2}{175} - 500 = 4.22$$

$$x^2_{3-1,0.05} = 5.99$$

4.22<5.99 άρα αποδέχομαι την H_0

Απάντηση

- Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η πραγματική αναλογία των επιχειρήσεων με έντονη δραστηριότητα είναι 30% (α=0.01)?

H_0: p=0.30

H_1: p≠0.30 δίπλευρο τεστ

$$z_{1-a/2} = z_{1-0.005} = z_{0.995} = 2.575$$

$$\widehat{p} = \frac{120}{500} = 0.24$$

$$\pi \pm z_{a/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}} = 0.3 \pm 2.575 * \sqrt{\frac{0.3*0.7}{500}} = [0.279, 3.205]$$

Το 0.24 δεν ανήκει στο διάστημα άρα απορρίπτεται η H_0

Απάντηση

- Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι τα ποσοστά δεν διαφέρουν μεταξύ τους (α=0.05)?

Αν δεν διαφέρουν τότε $p_1=p_2=p_3=1/3$.

Επομένως έχουμε

H_0: $p_1=p_2=p_3=1/3$

H_1: κάποιο $p_i \neq 1/3$

δραστηριότητα	έντονη	μερική	Ελάχιστη
Συχνότητες (f_i)	120	200	180
Πιθανότητες (p_i)	1/3	1/3	1/3
Εκτιμήσεις	500/3	500/3	500/3

Απάντηση

$$X_* = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i^2}{n\pi_i} - n = 20.8$$

$x^2_{3-1,0.05} = 5.99$ 20.8>5.99 άρα απορρίπτω την H_0