Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Αν x_i i=1,2,…,n παρατηρήσεις των X_i i=1,2,…,n, τότε έχουμε διαθέσιμο ένα δείγμα $\mathbf{X}=\{X_i, i=1,2,\ldots,n\}$ της κατανομής F μεγέθους n με από κοινού σ.κ. της X

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Ορισμός : Θεωρούμε ένα τυχαίο δείγμα $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ από πληθυσμό το οποίο έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x_i;\theta)$, με $\theta\in\Theta$. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας (likelihood) ορίζεται από τη σχέση,

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

και ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας (log-likelihood) ορίζεται ως

$$l(\theta) = \log L(\theta) = \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i;\theta)$$

Λαμβάνοντας την πρώτη παράγωγο ως προς θ

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

και αφού βεβαιωθούμε ότι η δεύτερη παράγωγος ως προς θ είναι γνησίως αρνητική, λαμβάνεται η μέγιστη τιμή της παραμέτρου . Η εκτίμηση επομένως Μέγιστης Πιθανοφάνειας είναι η λύση της εξίσωσης πιθανοφάνειας.

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Ορισμός : Ο εκτιμητής $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X)$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$l(\widehat{\theta}) = \max l(\theta)$$

είναι η παράμετρος η οποία μεγιστοποιεί την πιθανοφάνεια του δείγματος Χ και καλείται **Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας** (Ε.Μ.Π.) του θ.

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

Αν, για παράδειγμα, ληφθεί ένα τυχαίο δείγμα Y_1, Y_2, ..., Y_n από την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας θα είναι

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y_i}}{y_i!} = \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!}$$

Και ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας

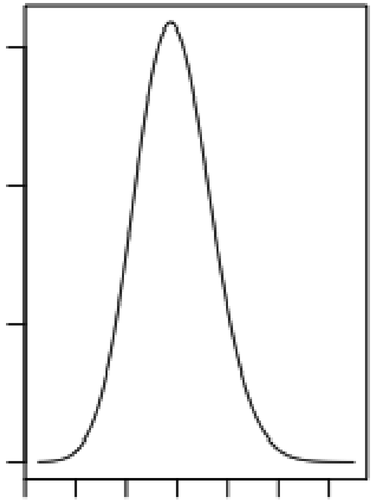
$$\ell(\lambda) = \ logL(\lambda) = log\frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} y_i}}{\prod_{i=1}^{n} y_i!} = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} y_i \log(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} \log y_i!$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας

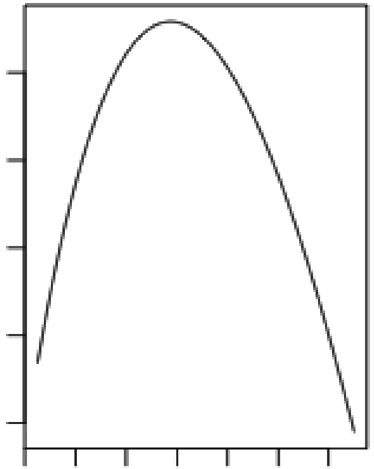
Οπότε, παίρνοντας την πρώτη παράγωγο,

$$\frac{\partial \ell(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -n + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$$

δίνονται αντίστοιχα τα διαγράμματα για τη συνάρτηση πιθανοφάνειας και τη συνάρτηση του λογαρίθμου της πιθανοφάνειας:



likelihood



log-likelihood

Έλεγχος πολυωνυμικής με άγνωστες παραμέτρους

- Όταν οι παράμετροι π_i, i=1,2,..,k είναι άγνωστοι, θα πρέπει να εκτιμηθούν από τα δεδομένα και μετά να χρησιμοποιηθεί το τεστ καλής προσαρμογής x^2 όπου αντί για $e_i = n\pi_i$ γίνεται $e_i = n\widehat{\pi}_i$ όπου $\widehat{\pi}_i$ είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοθάνειας (Ε.Μ.Π.) των άγνωστων παραμέτρων και η x^2 –κατανομή θα είναι x^2_{k-1-s} όπου s ο αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων.

Έλεγχος πολυωνυμικής με άγνωστες παραμέτρους

- **Θεώρημα**: Αν οι παράμετροι π_i, i=1,2,..,k εξαρτώνται από άλλες παραμέτρους **άγνωστες** θ δηλ: $\pi_i = \pi_i(\theta)$ τότε:

$$x_*^2 = \sum_{i=1}^{I} \frac{\left(n_i - n\pi_i\left(\widehat{\theta}\right)\right)^2}{n\pi_i\left(\widehat{\theta}\right)} \sim x_{k-1-s}^2$$

Άσκηση

- Σε πρόβλημα γενετικής μια ομάδα βιολόγων προτείνει μοντέλο τριωνυμικής κατανομής με $\pi_1=\theta^2$, $\pi_2=2\theta(1-\theta)$, και $\pi_3=(1-\theta)^2$, με $0<\theta<1$. Αν $n=50$ με συχνότητες $\pi_1=15$, $\pi_2=10$ και $\pi_3=25$ να δειχθεί αν τα δεδομένα ακολουθούν τριωνυμική κατανομή. Επίσης να αποδειχθεί ότι

$$-\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial^2 \theta} = \left(\frac{2n_1+n_2}{\theta^2}\right) + \left(\frac{n_2+2n_3}{(1-\theta)^2}\right)$$

καθώς και ότι η αναμενόμενη τιμή ισούται με

$$E\left(-\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial^2 \theta}\right) = \left(\frac{2n}{\theta(1-\theta)}\right)$$

Απάντηση

Ελέγχουμε

$$H_0 : \pi_i = \pi_i\left(\widehat{\theta}\right) \qquad\qquad H_0 : \pi_i \neq \pi_i\left(\widehat{\theta}\right)$$

Η πιθανοφάνεια δίνεται από την σχέση:

$$L(\theta) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\pi_1^{n_1}\pi_2^{n_2}\pi_3^{n_3} = c\,\theta^{2n_1}\left[2\theta(1-\theta)\right]^{n_2}(1-\theta)^{2n_3}$$

Ο λογάριθμος της πιθανοφάνειας

$$\log L(\theta) = \log c + 2n_1 \log\theta + n_2 \log 2\theta + n_2 \log(1-\theta) + 2n_3 \log(1-\theta)$$

Απάντηση

με πρώτη παράγωγο

$$\frac{\partial \log L(\theta)}{\partial \theta} = \frac{2n_1}{\theta} + \frac{n_2}{\theta} - \frac{n_2}{1-\theta} - \frac{2n_3}{1-\theta} = 0$$

Οπότε

Εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας

$$\hat{\theta} = \frac{2n_1 + n_2}{2n}$$

όπου $n_1 + n_2 + n_3 = n$

Άρα

$$\hat{\theta} = \frac{2n_1 + n_2}{2n} = \frac{2 * 15 + 10}{100} = 0.4$$

Απάντηση

Οπότε παίρνουμε
$$\hat{\pi}_1 = \hat{\theta}^2 = 0.16$$
$$\hat{\pi}_2 = 2\hat{\theta}\left(1-\hat{\theta}\right) = 0.48$$
$$\hat{\pi}_3 = \left(1-\hat{\theta}\right)^2 = 0.36$$

Με αντίστοιχες αναμενόμενες εκτιμήσεις
$$e_1 = n\hat{\pi}_1 = 8$$
$$e_2 = n\hat{\pi}_2 = 24$$
$$e_3 = n\hat{\pi}_3 = 18$$

Τεστ καλής προσαρμογής
$$x_*^2 = \sum_{i=1}^{I} \frac{\left(n_i - n\pi_i\left(\hat{\theta}\right)\right)^2}{n\pi_i\left(\hat{\theta}\right)} = \frac{(15-8)^2}{8} + \frac{(10-24)^2}{24} + \frac{(25-18)^2}{18} = 17$$
$$x^2_{k-1-s,0.05} = x^2_{3-1-1,0.05} = x^2_{1,0.05} = 5.024$$

5.024<17 άρα απορρίπτω την H_0

Απάντηση

Για την δεύτερη μερική παράγωγο έχουμε

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial^2 \theta} = -\left(\frac{2n_1 + n_2}{\theta^2}\right) - \left(\frac{n_2 + 2n_3}{(1-\theta)^2}\right) \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial^2 \theta} = \left(\frac{2n_1 + n_2}{\theta^2}\right) + \left(\frac{n_2 + 2n_3}{(1-\theta)^2}\right)$$

Και για την αναμενόμενη τιμή της 2ης παραγώγου έχουμε

$$E\left(-\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial^2 \theta}\right) = \frac{2E(n_1) + E(n_2)}{\theta^2} + \frac{E(n_2) + 2E(n_3)}{(1-\theta)^2} =$$

$$= \frac{2n\theta^2 + 2n\theta(1-\theta)}{\theta^2} + \frac{2n\theta(1-\theta) + 2n(1-\theta)^2}{(1-\theta)^2} = \frac{2n}{\theta} + \frac{2n}{(1-\theta)} = \frac{2n}{\theta(1-\theta)}$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

- Όταν το μέγεθος του δείγματος n είναι γνωστό αλλά τα αθροίσματα (γραμμών ή στηλών) άγνωστα τότε πολυωνυμικό μοντέλο δειγματοληψίας εφαρμόζεται. Τα κελιά (I,J) είναι τα πιθανά αποτελέσματα με σ.π.π. να ισούται με

$$\frac{n_{..}!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_{i} \prod_{j} \pi_{ij}^{n_{ij}}$$

Επομένως αναφερόμαστε στο συνολικό αριθμό του μεγέθους του δείγματος n

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

- Αν ο πίνακας συνάφειας είναι μεγέθους IJ και δεσμεύσουμε ως προς το συνολικό αριθμό του δείγματος τότε η συνάρτηση πιθανοφάνειας δίνεται από την σχέση:

$$l = \frac{n_{..}!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_i \prod_j \pi_{ij}^{n_{ij}} \propto \prod_i \prod_j \pi_{ij}^{n_{ij}}$$

με μέγιστη τιμή για $\pi_{11} = \pi_{12} = \pi_{13} = \ldots = \pi_{IJ} = 1$ δηλ: **όταν όλες οι πιθανότητες εμφάνισης του συνδυασμού των ενδεχομένων ισούται με μονάδα**. **Αλλά αυτό είναι αδύνατον γιατί το άθροισμα των πιθανοτήτων πρέπει να ισούται με την μονάδα.**

$$\sum_i \sum_j \pi_{ij} = 1$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

- Επομένως στην περίπτωσή μας θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας l με βάση τον περιορισμό ότι:

$$\max l \rightarrow \max \log l$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\pi_{ij} = 1$$

Περίπτωση γραμμικού προγραμματισμού: επίλυση συστήματος εξισώσεων κάτω από περιορισμούς

Για την μεγιστοποίηση χρησιμοποιούμε τον λογάριθμο της συνάρτησης πιθανοφάνειας. **Στις περιπτώσεις που θέλουμε να ελέγξουμε την επίδραση των περιορισμών πάνω στην διαδικασία μεγιστοποίησης της συνάρτησής μας κάνουμε χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange**

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

Ακρότατα με περιορισμούς ισοτήτων

- Έστω μία συνάρτηση $f:R^n \rightarrow R$ με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους και οι περιορισμοί $g(q)=0$, $g:R^n \rightarrow R^m$
- Το πρόβλημα είναι να βρεθούν τα ακρότατα της f υπό τους περιορισμούς g.
- Θα μετατρέψουμε το πρόβλημα αυτό σε κάποιο που ξέρουμε να λύνουμε: στο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς. Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

Ακρότατα με περιορισμούς ισοτήτων

- Ορίζοντας την Λαγκρανζιανή (κατ' άλλους Χαμιλτονιανή) L ως

$$L(q,\lambda) = f(q) + \lambda^T g(q)$$

όπου το διάνυσμα λ καλείται πολλαπλασιαστής Lagrange, και βρίσκοντας τα ακρότατά της, έχουμε επιτύχει τον στόχο μας (Θεμελιώδες θεώρημα)

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda})}{\partial(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\lambda})} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{q}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{q}}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

Ακρότατα με περιορισμούς ισοτήτων

- Η δεύτερη προϋπόθεση εξασφαλίζει την ικανοποίηση των αρχικών περιορισμών ισοτήτων.
- Η σχέση

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{g}} = -\boldsymbol{\lambda}$$

μας δείχνει ότι οι πολλαπλασιαστές Lagrange ερμηνεύονται σαν την αλλαγή στη βέλτιστη τιμή που επιφέρει μία αλλαγή στους περιορισμούς.

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

Ακρότατα με περιορισμούς ισοτήτων

- Με βάση το πρόβλημα της μεγιστοποίησης που έχουμε να επιλύσουμε οι περιορισμοί μετατρέπονται σε

$$\max \log l$$

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\pi_{ij} - 1 = 0$$

και η γενική μορφή της συνάρτησης Lagrange δίνεται από την σχέση

$$L(.) = f(.) + \lambda[g(.) - b]$$

όπου g(.)=b είναι οι περιορισμοί μας

Στην περίπτωση την δική μας

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\pi_{ij} = 1$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

Ακρότατα με περιορισμούς ισοτήτων

- Με βάση την γενική μορφή:

$$L(.) = f(.) + \lambda[g(.) - b]$$

η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε γίνεται (λαμβάνοντας τους λογαρίθμους):

$$L = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} \log \pi_{ij} - \lambda\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \pi_{ij} - 1\right]$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

- Παραγωγίζοντας ως προς π_{ij}, i=1,2,…,I και j=1,2,…,J και εξισώνοντας με το μηδέν έχουμε

$$\frac{\partial L}{\partial \widehat{\pi}_{ij}} = \frac{n_{ij}}{\widehat{\pi}_{ij}} - \lambda = 0$$

Άμα λύσουμε ως προς n_{ij} και αθροίσουμε επί του συνολικού δείγματος έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} = \lambda \cancelto{1}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\widehat{\pi}_{ij}} = \lambda \Rightarrow \lambda = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} = n_{..}$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

- Αντικαθιστώντας της δεύτερη σχέση στην πρώτη έχουμε

$$\frac{n_{ij}}{\widehat{\pi}_{ij}} = \lambda \qquad \lambda = n_{..} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \widehat{\pi}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{..}}$$

- **Οι εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας των πιθανοτήτων π_{ij}, είναι οι εμπειρικές εκτιμήσεις των πιθανοτήτων**

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

- Κάτω από την υπόθεση της ανεξαρτησίας έχουμε

$$\pi_{ij} = \pi_{i.} * \pi_{.j}$$

η συνάρτηση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε γίνεται (λαμβάνοντας τους λογαρίθμους):

$$L = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} \log\left(\pi_{i.} * \pi_{.j}\right) - \lambda\left[\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(\pi_{i.} * \pi_{.j}\right) - 1\right]$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας πολυωνυμικής δειγματοληψίας

- Μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο ως προς $\pi_{i.}$ και ως $\pi_{.j}$ έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \widehat{\pi}_{i.}} = 0 \Rightarrow \sum_{j} \frac{n_{ij}}{\widehat{\pi}_{i.}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \widehat{\pi}_{.j}} = 0 \Rightarrow \sum_{i} \frac{n_{ij}}{\widehat{\pi}_{.j}} - \lambda = 0$$

$$\lambda = n_{..}$$

$$\widehat{\pi}_{i.} = \frac{n_{i.}}{n_{..}}$$

$$\widehat{\pi}_{.j} = \frac{n_{.j}}{n_{..}}$$

$$\boxed{\widehat{\pi}_{ij} = \pi_{i,} * \pi_{.j} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n_{..}^{2}}}$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας γινόμενο πολυωνυμικής

- Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε επίπεδο της X, έστω X = i, διαθέτουμε n_i, παρατηρήσεις. Έστω επίσης ότι οι μετρήσεις της Y σε ένα επίπεδο της X είναι ανεξάρτητες από αυτές σε ένα άλλο επίπεδο της X, έχοντας συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $(\pi_{1|i}, \ldots, \pi_{J|i})$. Τότε για κάθε γραμμή έχουμε ένα διαφορετικό πολυωνυμικό πείραμα. Οι μετρήσεις n_{ij}, j = 1,..., J έχουν την πολυωνυμική κατανομή:

$$\frac{n_{i.}!}{\prod_j n_{ij}!} \prod_j \pi_{j|i}^{n_{ij}}$$

Επομένως στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε σε μεταβαλλόμενα επίπεδα είτε οριζόντια είτε κάθετα στο πίνακα συνάφειας όπου το αντίθετο επίπεδο παραμένει σταθερό – “υπό συνθήκη” πιθανότητα

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας γινόμενο πολυωνυμικής

- Για να βρούμε το μέγιστο χρησιμοποιούμε τους πολλαπλασιαστές Lagrange, όπου θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση

$$L = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} \log \pi_{j|i} - \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{J} \pi_{j|i} - 1 \right)$$

- Παραγωγίζοντας ως προς $\pi_{j|i}$ και εξισώνοντας με το μηδέν έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \widehat{\pi}_{j|i}} = \frac{n_{ij}}{\widehat{\pi}_{j|i}} - \lambda_i = 0$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας γινόμενο πολυωνυμικής

- Αθροίζοντας ως προς όλα τα j έχουμε:

$$\frac{n_{ij}}{\widehat{\pi}_{j|i}} = \lambda_i \Rightarrow n_{ij} = \lambda_i * \widehat{\pi}_{j|i} \Rightarrow \sum_j n_{ij} = \lambda_i * \sum_j \widehat{\pi}_{j|i} \Rightarrow \lambda_i = n_{i.}$$

- Αντικαθιστώντας την δεύτερη στην πρώτη σχέση έχουμε:

$$\widehat{\pi}_{j|i} = \frac{n_{ij}}{n_{i.}}$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας γινόμενο πολυωνυμικής

- Αν ισχύει η υπόθεση της ανεξαρτησίας τότε η πιθανοφάνεια γράφεται:

$$l \propto \prod_{j} \pi_j^{n_{.j}}$$

όπου π_j είναι η κοινή τιμή των πιθανοτήτων $\pi_{j|1}, \ldots, \pi_{j|I}$ οι οποίες κάτω από την μηδενική υπόθεση είναι ίσες

- Με βάση τους πολλαπλασιαστές Lagrange η συνάρτηση που πρέπει να μεγιστοποιηθεί είναι:

$$L = \sum_{i=1}^{I} n_{.j} \log \pi_j - \lambda \left(\sum_{j=1}^{J} \pi_j - 1 \right)$$

Μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας γινόμενο πολυωνυμικής

- Παραγωγίζοντας ως προς την π_j και μηδενίζοντας έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \widehat{\pi}_j} = \frac{n_{.j}}{\widehat{\pi}_j} - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n_{.j}}{\widehat{\pi}_j}$$

με λύσεις των εξισώσεων μετά από αντικατάσταση:

$$\lambda = n_{..}$$

$$\widehat{\pi}_j = \frac{n_{.j}}{n_{..}}$$

Άσκηση

- Έστω ότι μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε το ποσοστό των ανθρώπων ενός μεγάλου ομογενούς πληθυσμού που πάσχουν από AIDS. Για τον λόγο αυτό επιλέγεται ένα τυχαίο δείγμα n ατόμων του πληθυσμού αυτού. Τα άτομα αυτά υποβάλλονται στο σχετικό τεστ. Έστω ότι από τον έλεγχο αυτό προκύπτει ότι x από τα άτομα αυτά πάσχουν από την ασθένεια. Να βρεθεί η κατανομή τους και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις.

Απάντηση

- Λόγω της υπόθεσης ότι ο πληθυσμός είναι μεγάλος και ομοιογενής, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα άτομα του δείγματος που υποβλήθηκαν στον έλεγχο είναι ανεξάρτητα και κάθε ένα από αυτά έχει πιθανότητα p να πάσχει από την ασθένεια.
- Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα του παρατηρηθέντος ενδεχομένου (του παρατηρηθέντος δείγματος) είναι

$$P\,(E\,;\,\theta) = P\,(\text{x από n άτομα έχουν AIDS})$$

$$= \binom{n}{x} p^{x} (1-p)^{n-x}$$

Απάντηση

- Ο παραμετρικός χώρος στην περίπτωση αυτή είναι

$$\Theta = [0,\ 1]\ (\text{δηλ. } 0 \le p \le 1)$$

- Ως συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να ορισθεί οποιοδήποτε θετικό πολλαπλάσιο της P(E; p)

$$L(p) = p^{x}(1-p)^{n-x}\ , \qquad 0 \le p \le 1$$

$$\ell(p) = \ln L(p) = x\ln p + (n-x)\ln(1-p)$$

$$\ell'(p) = \frac{x}{p} - \frac{n-x}{1-p}\ , \qquad \ell''(p) = -\frac{x}{p^2} - \frac{n-x}{(1-p)^2}\ ,\ p \ne 0,\ p \ne 1$$

Απάντηση

Για $1 \le x \le n-1$, η εξίσωση $\ell'(p)=0$ έχει ως μοναδική λύση την $p = \dfrac{x}{n}$.

Δεδομένου ότι $\ell''(p) < 0$ για $p = \dfrac{x}{n}$ το σημείο αυτό είναι ένα (τοπικό) μέγιστο.

Εξάλλου, δοθέντος ότι $L(p)=0$ για $p=0$ και για $p=1$, το $p = \dfrac{x}{n}$ είναι το (ολικό) απόλυτο μέγιστο και επομένως

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Απάντηση

- Αν x=0, η εξίσωση l'(p) =0 δεν έχει λύση και το μέγιστο εμφανίζεται στο σύνορο του παραμετρικού χώρου Θ=[0,1].
- Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$P\,(E\,;\,\theta) = (1 - p)^n \quad \text{για } 0 \leq p \leq 1$$

- Προφανώς, η συνάρτηση αυτή παίρνει την μέγιστη τιμή της όταν p=0.
- Ομοίως, για x=n θα είναι p = 1 και έτσι, τελικά,

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad \text{για } x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Άσκηση

Στον στατιστικό έλεγχο ποιότητας ενός εργοστασίου, προκειμένου να ελεγχθεί η ποιότητα των προϊόντων, επιλέγονται καθημερινά και επί 200 συνεχείς ημέρες 10 αντικείμενα με τυχαίο τρόπο και ελέγχονται για πιθανές ατέλειες. Τα αποτελέσματα δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Αριθμός ελαττωματικών	0	1	2	3	≥4	Σύνολο
Παρατηρηθείσα συχνότητα	133	52	12	3	0	200

Έστω p η πιθανότητα ένα αντικείμενο να είναι ελαττωματικό. Να βρεθεί η εκτιμήτρια μεγίστης πιθανοφάνειας του p.

Απάντηση

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο αριθμός των ελαττωματικών αντικειμένων σε κάθε παρτίδα 10 αντικειμένων ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παράμετρο p. Στην περίπτωση αυτή, η πιθανότητα P_j στα 10 αντικείμενα να παρατηρηθούν j ελαττωματικά δίνεται από την διωνυμική κατανομή.

$$P_j = P(X = j) = \binom{10}{j} p^j (1-p)^{10-j} \qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ 10$$

Η πιθανότητα να παρατηρηθούν4, ή περισσότερα ελαττωματικά αντικείμενα στο δείγμα των10 αντικειμένων δίνεται από τον τύπο

$$P(X \geq 4) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\right]$$

Απάντηση

Για τα συγκεκριμένα δεδομένα έχουμε ότι η συνάρτηση πιθανοφάνειας της παραμέτρου p παίρνει την γενική μορφή:

$$l = \frac{n_{..}!}{\prod_{ij} n_{ij}!} \prod_i \prod_j \pi_{ij}^{n_{ij}} \propto k \prod_i \prod_j \pi_{ij}^{n_{ij}}$$

με $\mathrm{L(p)} = \mathrm{k}\left[\mathrm{P(X=0)}\right]^{133}\left[\mathrm{P(X=1)}\right]^{52}\left[\mathrm{P(X=2)}\right]^{12}\left[\mathrm{P(X=3)}\right]^{3}\left[\mathrm{P(X \geq 4)}\right]^{0}$

$$= \mathrm{k}P_0^{133} P_1^{52} P_2^{12} P_3^{3} P_4^{0} \quad , \qquad 0 \leq p \leq 1$$

Αριθμός ελαττωματικών	0	1	2	3	≥4	Σύνολο
Παρατηρηθείσα συχνότητα	133	52	12	3	0	200

Απάντηση

Αντικαθιστώντας τις τιμές των P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, έχουμε

$$L(p) = \left[(1-p)^{10}\right]^{133}\left[p(1-p)^{9}\right]^{52}\left[p^{2}(1-p)^{8}\right]^{12}\left[p^{3}(1-p)^{7}\right]^{3}$$

$$= p^{85}(1-p)^{1915}$$

Γενική μορφή $\quad P_j = P(X=j) = \binom{10}{j} p^{j}(1-p)^{10-j} \qquad j=0, 1, \ldots, 10$

$$j=0 \Rightarrow P_0 = P(X=0) = \binom{10}{0} p^{0}(1-p)^{10-0} \propto (1-p)^{10}$$

Απάντηση

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι ο λόγος των παρατηρηθεισών ευνοϊκών περιπτώσεων διά του συνολικού αριθμού των δοκιμών

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Άρα x=85, n=2000=1915+85

$$L(p) = \left[(1-p)^{10}\right]^{133}\left[p(1-p)^{9}\right]^{52}\left[p^{2}(1-p)^{8}\right]^{12}\left[p^{3}(1-p)^{7}\right]^{3}$$

$$= p^{85}(1-p)^{1915}$$

Επομένως

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{85}{2000} = 0.0425$$

Απάντηση

Χρησιμοποιώντας την τιμή αυτή μπορούμε να βρούμε τις αναμενόμενες συχνότητες

$$n P_j = 100P_j \text{ , } j=0, 1, 2, 3$$

Οι αναμενόμενες συχνότητες δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

Αριθμός Ελαττωματικών	0	1	2	3	≥4	Σύνολο
Παρατηρούμενη Συχνότητα	133	52	12	3	0	200
Αναμενόμενη Συχνότητα	129.54	57.50	11.48	1.36	0.12	200

Άσκηση

- Έστω η διακριτή τ.μ. $X \sim f(x;\theta) = \theta^2(x+1)(1-\theta)^x,\ x = 0,1,\ldots$

όπου $\theta \in \Omega = \{0,1\}$. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. της θ

$$L(\theta) = \theta^{2n}\left[\prod_{i=1}^{n}(x_i+1)\right](1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$l(\theta) = 2n\log\theta + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\log(1-\theta) + \log\prod_{i=1}^{n}(x_i+1)$$

$$\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} = \frac{2n}{\theta} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{(1-\theta)} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{2}{2+\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2(1-\hat{\theta})}{\hat{\theta}}$$

$$\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial^2\theta} = -\frac{2n}{\left(\dfrac{2}{2+\bar{x}}\right)^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\left(\dfrac{\bar{x}}{2+\bar{x}}\right)} < 0$$

Άσκηση

- Έστω X_i, i=1,2…,n τ.δ. από την κατανομή B(N,θ) με $\theta\in(0,1)$. Να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. Έστω τ.δ. από την κατανομή B(3,θ) με τιμές $x_1=3$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $x_5=1$, να βρεθεί ο Ε.Μ.Π. της P(X=0)

$$L(\theta)=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{nN-\sum_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}\binom{N}{x_i},$$

$$l(\theta)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\theta+\left(nN-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-\theta)+\ln\prod_{i=1}^{n}\binom{N}{x_i},$$

$$\frac{d}{d\theta}l(\theta)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}-\frac{nN-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-\theta}=0\Rightarrow\theta=\frac{\bar{x}}{\mathrm{N}}.$$

$$\frac{d^2}{d^2\theta}l(\theta)=-\frac{nN^2}{\bar{x}}-\frac{n(N-\bar{x})}{\left(1-\frac{\bar{x}}{\mathrm{N}}\right)^2}<0$$

Άσκηση

Επομένως η $\hat{\theta} = \dfrac{\overline{X}}{N}$ είναι η Ε.Μ.Π. του θ.

Από τις μετρήσεις $x_1=3$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=2$, $x_5=1$ παίρνουμε ότι $\hat{\theta} = \dfrac{\overline{x}}{N} = 0.466$.

$$P(X=0) = \binom{3}{0} 0.466^{0} (1-0.466)^{3-0} = 0.15227$$

Λόγος πιθανοφανειών πολυωνυμική δειγματοληψία

- Οι έλεγχοι αυτοί στηρίζονται στη συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας. Έστω θ το σύνολο των παραμέτρων του υποδείγματος και L(θ) η συνάρτηση πιθανοφάνειας. Με τη μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας εκτιμώνται (ι) το υπόδειγμα χωρίς περιορισμούς $L(\theta_1)$ και (ιι) το υπόδειγμα με τους περιορισμούς, $L(\theta_2)$.

Ο έλεγχος του λόγου συναρτήσεων πιθανοφάνειας προκύπτει από τη διαίρεση:

$$\Lambda = \frac{\max L(\theta_2)}{\max L(\theta_1)}, \lambda \in [0,1]$$

Λόγος πιθανοφανειών πολυωνυμική δειγματοληψία

- Η τιμή του λόγου Λ είναι απαραίτητα μικρότερη της μονάδας, αφού η τιμή του αριθμητή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από αυτήν του παρονομαστή. Εάν η τιμή του Λ είναι πλησίον του μηδενός, τότε η μηδενική υπόθεση δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή, που σημαίνει ότι οι περιορισμοί δεν ασκού επίδραση στη μέγιστη τιμή της συνάρτησης πιθανοφάνειας.
- Αντίθετα, εάν πλησιάζει τη μονάδα, τότε οι περιορισμοί ασκούν επίδραση και η μηδενική υπόθεση μπορεί να γίνει αποδεκτή.

Λογος πιθανοφανειων πολυωνυμική δειγματοληψία

- Η μεγιστοποιημένη πιθανοφάνεια κάτω από την μηδενική υπόθεση H_0 γίνεται:

$$\frac{n_{..}!}{n_{11}!\cdots n_{IJ}!}\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{n_{i.}n_{.j}}{n_{..}n_{..}}\right)^{n_{ij}}$$

$$\widehat{\pi}_{ij}$$

$$\widehat{\pi}_{ij} = \pi_{i,} * \pi_{.j} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n_{..}^{2}}$$

Υπόθεση ανεξαρτησίας

Λογος πιθανοφανειων πολυωνυμικη δειγματοληψία

- Η μεγιστοποιημένη πιθανοφάνεια κάτω από την υπόθεση H_1 των περιορισμών γίνεται:

$$\frac{n_{..}!}{n_{11}!\cdots n_{IJ}!}\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{n_{ij}}{n_{..}}\right)^{n_{ij}}$$

$$\widehat{\pi}_{ij}$$

αναφερόμαστε στο συνολικό αριθμό του μεγέθους του δείγματος n

Λόγος πιθανοφανειών πολυωνυμική δειγματοληψία

- Ο λόγος πιθανοφανειών δίνεται από την σχέση

$$\Lambda = \frac{\prod_i \prod_j (n_{i.} n_{.j})^{n_{ij}}}{n_{..}^{n_{..}} \prod_i \prod_j n_{ij}^{n_{ij}}}$$

- Η στατιστική συνάρτηση

$$G^2 = -2\log\Lambda \sim x^2_{d_1 - d_0}$$

d_k είναι ο αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων κάτω από από την υπόθεση H_k για $k = 0, 1$.

Λογος πιθανοφανειων πολυωνυμική δειγματοληψία

- Οταν έχουμε IJ πίνακες οι υποθέσεις είναι

H_0: X,Y ανεξάρτητες μεταβλητές έναντι της

H_1:X,Y εξαρτημένες μεταβλητές

Οταν η H_1 ισχύει, πρέπει να εκτιμήσουμε όλες τις από κοινού πιθανότητες π_{ij}

΄Οταν η H_0 ισχύει, πρέπει να εκτιμήσουμε τις περιθώριες κατανομές $\pi_{i\,.}$ και $\pi_{.j}$

Λόγος πιθανοφανειών πολυωνυμική δειγματοληψία

- Υποθέτουμε πολυωνυμική κατανομή με

$$L_0 = \prod_i \prod_j \left(\pi_{i.} * \pi_{.j}\right)^{n_{ij}}$$

$$\log L_0 = \sum_i \sum_j n_{ij} \log \pi_{i.} + \sum_i \sum_j n_{ij} \log \pi_{.j}$$

$$L_1 = \prod_i \prod_j \left(\pi_{ij}\right)^{n_{ij}}$$

$$\log L_1 = \sum_i \sum_j n_{ij} \log \pi_{ij}$$

Λογος πιθανοφανειων πολυωνυμικη δειγματοληψία

- Επομένως

$$G^2 = -2(\log L_0 - \log L_1) = -2\sum_i \sum_j n_{ij} \log \frac{\pi_{i.} * \pi_{.j}}{\pi_{ij}} =$$

$$= -2\sum_i \sum_j n_{ij} \log \frac{\frac{e_{ij}}{n}}{\pi_{ij}} = -2\sum_i \sum_j n_{ij} \log \frac{\frac{e_{ij}}{n}}{\pi_{ij}} = -2\sum_i \sum_j n_{ij} \log \frac{e_{ij}}{n\pi_{ij}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G^2 = -2\sum_i \sum_j n_{ij} \log \frac{e_{ij}}{n_{ij}} \sim x^2_{(I-1)(J-1)}$$

$$\pi_{i.} * \pi_{.j} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n_{..}^2} = \frac{n_{i.} * n_{.j}}{n} \frac{1}{n} = \frac{e_{ij}}{n} \qquad \pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{n} \Rightarrow n_{ij} = n\pi_{ij}$$

Λόγος πιθανοφανειών γινόμενο πολυωνυμικών

- Η μεγιστοποιημένη πιθανοφάνεια κάτω από την μηδενική υπόθεση H_0 γίνεται:

$$\frac{n_{..}!}{n_{11}!\cdots n_{IJ}!}\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{n_{.j}}{n_{..}}\right)^{n_{.j}}$$

$$\hat{\pi}_j$$

Υπόθεση ανεξαρτησίας

Λόγος πιθανοφανειών γινόμενο πολυωνυμικών

- Η μεγιστοποιημένη πιθανοφάνεια κάτω από την υπόθεση H_1 των περιορισμών γίνεται:

$$\frac{n_{..}!}{n_{11}!\cdots n_{IJ}!}\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{n_{ij}}{n_{i.}}\right)^{n_{ij}}$$

$\widehat{\pi}_{j|i}$

Επομένως στην περίπτωση αυτή αναφερόμαστε σε μεταβαλλόμενα επίπεδα είτε οριζόντια είτε κάθετα στο πίνακα συνάφειας όπου το αντίθετο επίπεδο παραμένει σταθερό – “υπό συνθήκη” πιθανότητα

Λόγος πιθανοφανειών γινόμενο πολυωνυμικών

- Ο λόγος πιθανοφανειών δίνεται από την σχέση

$$\Lambda = \frac{\prod_{j=1}^{J} n_{.j}^{n_{.j}} \prod_{i=1}^{I} n_{i.}^{n_{i.}}}{n_{..}^{n_{..}} \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} n_{ij}^{n_{ij}}}$$

- Η στατιστική συνάρτηση

$$G^2 = -2\sum_i \sum_j n_{ij} \log \frac{e_{ij}}{n_{ij}} \sim x^2_{(I-1)(J-1)}$$

Ιδιότητες

- Τα στατιστικά τεστ x^2 και G^2 είναι ίσα ασυμπτωτικά.
- Το στατιστικό τεστ x^2 συγκλίνει γρηγορότερα στην x^2 – κατανομή από ότι το G^2.
- Η x^2 σύγκλιση της κατανομής του G^2 δεν είναι καλή όταν

$$\frac{n_{..}}{IJ} \leq 5$$

- Αντίθετα το στατιστικό τεστ x^2 προσεγγίζεται καλύτερα από την x^2 – κατανομή ακόμα και για

$$\frac{n_{..}}{IJ} = 1$$

υπό την προϋπόθεση ο πίνακας να μην παίρνει πολύ μικρές τιμές ή σχετικά μεγάλες αναμενόμενες συχνότητες.

Άσκηση

- Σε μια προοπτική μελέτη κατά την οποία εξετάσθηκαν 368 άνδρες καπνιστές ηλικίας κάτω των 60 ετών οι οποίοι έπαθαν μια καρδιακή ανακοπή και επιβίωσαν. Μετά από 2 έτη εξετάσθηκαν πόσοι από αυτούς είχαν επιβιώσει και τους χωρίσαμε ανάλογα εάν είχαν κόψει το τσιγάρο ή όχι. Έτσι εδώ μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε αν το σταμάτημα του καπνίσματος (X) είχε ευνοϊκή επίδραση στην επιβίωση μετά από δύο έτη (Y). Τα δεδομένα δίνονται στον 2×2 Πίνακα που ακολουθεί:

X: Συνέχισαν το κάπνισμα	Y: Επιβίωση σε 2 χρόνια		Σύνολο
	1: Πεθαμένος	2: Ζωντανός	
1: Ναι	19 (12.3%)	135 (87.7%)	154 (41.8%)
2: Όχι	15 (7.0%)	199 (93.0%)	214 (58.2%)
Σύνολο	34 (9.2%)	334 (90.8%)	368

Άσκηση

Έχουμε:

$$x_{obs}^2 = \frac{(19-14.23)^2}{14.23} + \frac{(135-139.77)^2}{139.77} + \frac{(15-19.77)^2}{19.77} + \frac{(199-194.23)^2}{194.23}$$

$$= 3.03 \Leftrightarrow p-value = 0.082$$

άρα δεν απορρίπτουμε την υπόθεση ανεξαρτησίας.

$$G_{obs}^2 = -2\begin{pmatrix} 19\log 14.231 + 135\log 139.771 + \\ 15\log 19.771 + 199\log 194.231 \end{pmatrix} =$$

$$= 2.98 \Leftrightarrow \text{p}- \text{value} = 0.0842$$

άρα δεν απορρίπτουμε την υπόθεση ανεξαρτησίας.