Προσχέδιο Διδακτορικής Διατιβής
Complex Transforms and Planar processes

ΜΑΥΡΙΚΗΣ ΑΓΓΕΛΟΣ

Ιανουάριος, 2023

Γενικά

Από τις αρχές του προηγούμενου αιώνα, έπειτα από μεγάλη ανάγκη μοντελοποίησης τυχαίων φαινομένων αλλά και την εξέλιξη της κβαντομηχανικής, άρχισε να δημιουργείται μία αυστηρά μαθηματική θεωρία(Θεωρία των Στοχαστικών Διαδικασιών) που να στηρίζει την μελέτη τυχαίων φαινομένων που εξελίσσονται στον χρόνο. Μετά την κατασκευή λογισμού πάνω στην Διαδικασία Wiener (Κίνηση Brown) με κύριους εκφραστές τους Itô και Malliavin άρχισε να δημιουργείται και να παρατηρείται σύνδεση αυτής της θεωρίας με άλλους κλάδους των Μαθηματικών όπως η Αρμονική Ανάλυση και η Θεωρία Δυναμικού, με την Θεωρία Πιθανοτήτων να είναι αυτή που επωφελείται στις περισσότερες των περιπτώσεων από αυτήν τη σύνδεση. Ωστόσο, από το 1970 και μετά ξεκίνησαν, με μεγάλη ένταση, να αναπτύσσονται μέθοδοι όπου ο Στοχαστικός Λογισμός δίνει λύσεις σε προβλήματα των Θεωρητικών Μαθηματικών. Οι Πιθανοθεωρητικές μέθοδοι, όπως συνήθως αναφέρονται, παίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορους τομείς της Γεωμετρίας και της Μαθηματικής Ανάλυσης. Αξιοσημείωτες εφαρμογές πιθανοθεωρητικών μεθόδων εμφανίζονται στη Γεωμετρική Συναρτησιακή Ανάλυση, στην Αρμονική Ανάλυση και στα Διακριτά Μαθηματικά. Ενώ, από την αντίθετη πλευρά, νέα παρατηρηθέντα ¨φαινόμενα' της Γεωμετρίας και της Μαθηματικής Ανάλυσης συμβάλλουν στην ανάπτυξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Οι νέες αλληλεπιδράσεις μεταξύ Γεωμετρίας , Ανάλυσης και Πιθανοτήτων οδηγούν σε σημαντικές καινοτομίες σε αυτούς τους κλάδους.

Μιγαδική Ανάλυση και Διαδικασία Wiener

Το 1975 δημοσιεύτηκε από το American Mathematical Society μία εργασία του Burgess Davis στην οποία αποδεικνύεται το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, χρησιμοποιώντας την δισδιάστατη Κίνηση Brown[5]. Επίσης, περίπου 29 χρόνια αργότερα ο MIHAI N. PASCU δημοσίευσε μία παρόμοια εργασία στο ίδιο περιοδικό[18]. Και οι δύο συγγραφείς, πέραν των νέων αποδείξεων, υπονοούν ότι οι τεχνικές που αναπτύσσονται για την περάτωση των αποδείξεων ίσως είναι βασικό εργαλείο για περεταίρω γενίκευση των p-valent συναρτήσεων στον μοναδιαίο κύκλο.

Αργότερα, δόθηκαν και άλλες αποδείξεις με την βοήθεια της διαδικασίας Wiener όπως το Θεώρημα Liouvile για τις αναλυτικές συναρτήσεις. Επιπλέον, δόθηκαν λύσεις σε ιδιαίτερα προβλήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων όπως η πιθανότητα η πρώτη φορά όπου μία μιγαδική διαδικασία Wiener, η οποία έχει αφετηρία ένα αυθαίρετο σημείο εντός ανοιχτού κύκλου, ανήκει σε ένα διάστημα του συνόρου.

Παραδείγματα

Μία απεικόνιση $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ λέγεται Μετασχηματισμός Möbius αν είναι της μορφής

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ \ ad-bc \neq 0 \tag{1}$$

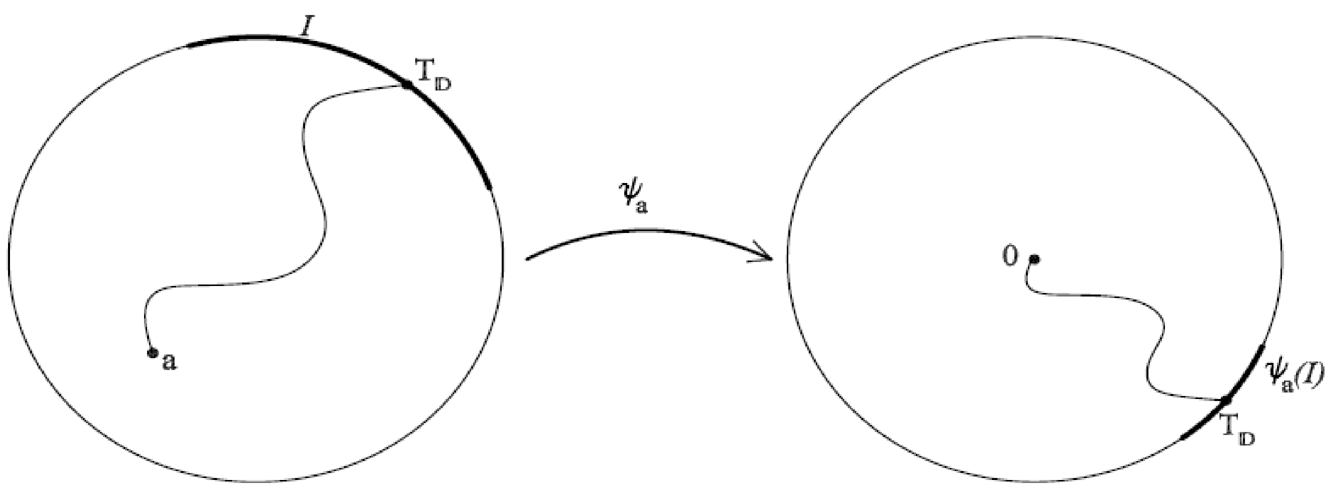
όπου η συνθήκη $ad - bc \neq 0$ είναι αναγκαία για να μην είναι η απεικόνιση σταθερή. Ο T απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.
Θεωρούμε τον Μετασχηματισμός Möbius

$$\Psi_a(z) = \frac{1-az}{1-\bar{a}z} \tag{2}$$

όπου για $|z| \leq 1$ ισχύει ότι $|\Psi_a(z)| \leq 1$, με την ισότητα να λαμβάνεται όταν $|z| = 1$.
Ορίζουμε, για μία μιγαδική διαδικασία Wiener $\{B_t, t \geq 0\}$, $T_{\mathbb{D}} = inf\{t \geq 0\ :\ B_t \in \mathbb{D}\}$ και για $\mathcal{I} \subseteq \partial\mathbb{D}$ με $\lambda(\mathcal{I})$ το μέτρο

Lebesgue του. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την πιθανότητα $P_a(B_{T_\mathbb{D}} \in \mathcal{I}) = P(B_{T_\mathbb{D}} \in \mathcal{I}, B_0 = a \neq 0\ a.s.)$. Ομως, η $P_0(B_{T_\mathbb{D}} \in \mathcal{I})$ είναι ομοιόμορφη και εφόσον η Ψ_a είναι μια αναλυτική απεικόνιση που στέλνει το a στο 0, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P_a(B_{T_\mathbb{D}} \in \mathcal{I}) &= P_0(B_{T_\mathbb{D}} \in \Psi_a(\mathcal{I})) = \frac{\lambda(\mathcal{I})}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}} |\Psi_a^{'}(e^{it})|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathcal{I}} \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{it}|}dt. \end{aligned}$$



Σχήμα 1: [11]

Αντιστρέφοντας την οπτική μπορεί να δοθεί μία σχέση για τις αρμονικές απεικονίσεις. Ένα σημαντικό θεώρημα της (Μιγαδικής) Στοχαστικής Ανάλυσης είναι η Φόρμουλα Dynkin.

Dynkin's Formula

Έστω χωρίο (domain) $K \subseteq \mathbb{C}$, $u(z) \in \mathcal{C}^2(K)$ και $a \in K$. Υποθέτουμε ότι $\tau < T_K$ με $E[\tau] < +\infty$ ένας χρόνος διακοπής ώστε η u και οι παράγωγοι της έως δεύτερης τάξης να είναι σχεδόν βεβαίως φραγμένες στο σύνολο $\{B_t : 0 \leq t \leq \tau\,,\, B_0 = a\ a.s\}$. Τότε,

$$E[u(B_\tau)] - u(a) = \frac{1}{2}E\big[\int_0^\tau \Delta u(B_s)ds\big]. \tag{3}$$

Η Φόρμουλα Dynkin παρέχει τον τρόπο με τον οποίο η $E(u(B_\tau))$ εξελίσσεται στον χρόνο. Όμως, μία πρόταση που προκύπτει από το θεώρημα αύτο αναφέρει ότι η συνθήκη $E(u(B_\tau)) = u(a)$ είναι ικανή να χαρακτηρίσει την u ως αναλυτική συνάρτηση. Επιπλέον, χαρακτηρίζει τις αρμονικές συναρτήσεις και τις δυναμοσειρές τους. Άρα, η Φόρμουλα Dynkin εκτός από της χρησιμοτητάς της στη Θεωρία Πιθανοτήτων, αποτελεί Θεμελιώδες Θεώρημα της Μιγαδικής Ανάλυσης.

Υποθέτουμε ότι u είναι μία αρμονική συνάρτηση στο (domain) K και $\overline{D(a,r)} \subseteq K$. Τότε,

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})dt. \tag{4}$$

Η σχέση προκύπτει εύκολα διότι, από τη Φόρμουλα Dynkin έχουμε ότι $u(a) = E[u(B_{T_{D(a,r)}})]$ και εφόσον η Διαδικασία Wiener είναι αναλλοίωτη κάτω από περιστοφές, η $B_{T_{D(a,r)}}$ έχει ομοιόμορφο μέτρο στο $C(a,r)$.

Στόχοι

Στόχος του ερευνητικού έργου είναι η μελέτη θεμάτων της Μιγαδικής Ανάλυσης με την βοήθεια της Θεωρίας Πιθανοτήτων αλλά και το αντίστροφο. Συγκεκριμένα:

- Ανάλυση ιδιοτήτων συναρτήσεων και γεωμετρικών θεμάτων του μιγαδικού επιπέδου με χρήση Επίπεδων Ανελίξεων.
- Μελέτη Μετασχηματισμών Μιγαδικών Συναρτήσεων σε (μιγαδικούς) αφηρημένους Χώρους Πιθανότητας.
- Μελέτη Περιελίξεων (Windings) διαφορετικών Ανελίξεων στο Επίπεδο και σε υψηλότερες διαστάσεις.

Πλάνο και χρονική διάρκεια ερευνητικού έργου

Διάρκεια: Από 42 έως 60 μήνες.

Διάρθρωση

1. Λεπτομερής ανάλυση της βιβλιογραφίας.
2. Ανάπτυξη πιθανοθεωρητικών μεθοδολογιών με επίπεδες ανελίξεις.
3. Διερεύνηση μετασχηματισμών σε μιγαδικούς στοχαστικούς χώρους και της σχέσης τους με τις συναρτήσεις περιελίξεων.
4. Δημοσιεύσεις και περάτωση διδακτορικής διατριβής.

Αναφορές

[1] Bandt C., Zähle M., Mörters P. , *Fractal Geometry and Stochastics IV*, Springer,(2009).

[2] Bass, R. , *Probabilistic techniques in analysis*,Springer ,(1994).

[3] Bishop, C., Peres, Y , *Fractals in probability and analysis*, Cambridge University Press,(2017).

[4] Bañuelos, R., Davis, B. , *Heat kernel, eigenfunctions, and conditioned Brownian motion in planar domains*,Journal of functional analysis,(1989).

[5] Davis B. , *Picard's Theorem and Brownian Motion*, American Mathematical Society,(1975).

[6] Betsakos D., Boudabra M., Markowsky G , *On the duration of stays of Brownian motion in domains in Euclidean space*, Electron. Commun. Probab.,(2022).

[7] Betsakos D., Boudabra M., Markowsky G. , *On the probability of fast exits and long stays of a planar Brownian motion in simply connected domains*, Journal of Mathematical Analysis ,(2021).

[8] Brémaud P. , *Fourier Analysis and Stochastic Processes*, Springer,(2014).

[9] Cass T. , *Brownian Motion in Complex Analysis*, http://people.maths.ox.ac.uk/belyaev/papers/BM-CA09.pdf,(2009).

[10] Heins M. , *Complex Function Theory*, Academic press Inc.,(1968).

[11] Markowsky Greg , *Planar Brownian Motion and Complex Analysis*, https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.08574 ,(2020).

[12] Üstünel A. S. , *Analysis on Wiener Space and Applications*, https://doi.org/10.48550/arXiv.1003.1649 ,(2010).

[13] Vakeroudis S. , Yor M. , *Some infinite divisibility properties of the reciprocal of planar Brownian motion exit time from a cone.*, Electronic Communications in Probability,(2012).

[14] Vakeroudis S , *On hitting times of the winding processes of planar Brownian motion and of Ornstein-Uhlenbeck processes, via Bougerol's identity.*, SIAM Theory of Probability and its Applications,(2012).

[15] Gareth A. Jones, David Singerman , *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint*, Cambridge University press,(1987).

[16] Wermer J , *Banach Algebras and Several Complex Variables*, Springer,(2013).

[17] Alexey N.Karapetyants IgorV.Pavlov Albert N.Shiryaev , *Operator Theory and Harmonic Analysis– Probability-Analytical Models, Methods and Applications*, Springer,(2020).

[18] Pascu M. N. , *A probabilistic proof of the fundamental theorem of algebra*, P. American Mathematical Society,(2004).

[19] Pitman J.M. , Yor M. , Asymptotic Laws of planar Brow- nian Motion. Ann. Prob. 14, 733-779, (1986)